Test di ammissione allo Stage di Fisica a Pisa 2021

Lo staff dello stage

28 novembre 2020

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono la prima sfida che vi separa dalla possibilità di partecipare allo stage 2021. Leggete attentamente questa introduzione: potrà esservi utile per approcciarvi al test correttamente.

Avete circa due settimane di tempo per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare o studiare gli argomenti che non sapete: il test serve anche a questo. Sconsigliamo però fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi (non vi aiuta ad approcciare argomenti nuovi in maniera autonoma; inoltre alle olimpiadi siete da soli!), né a noi per selezionare bene.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolvere tutti i problemi: sicuramente per molti di voi alcuni dei problemi più difficili risulteranno più facili, e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file pdf con tutte le vostre soluzioni. Potete scriverlo come preferite: LaTeX, Word, fotografando manoscritti... L'unica cosa importante è che sia perfettamente leggibile, perché ovviamente non potremo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere!

È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere completamente alcuni dei problemi: daremo punteggi parziali in tali casi. Inoltre, vi facciamo notare che per alcuni dei problemi è possibile risolvere i punti successivi anche senza aver fatto i precedenti.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario (ma non sufficiente!) per fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

1 In piscina [40 pt.]

Supponiamo che il corpo di una persona si trovi tutto alla temperatura 36.6 °C, senza variazioni nel tempo, nelle due seguenti situazioni:

1. circondato da aria a 21.0 °C;
2. con la testa circondata da aria a 40.0 °C e il corpo immerso in una piscina a 35.8 °C.

Si supponga che il calore prodotto dal corpo sia lo stesso in entrambe le condizioni. Il calore scambiato per unità di tempo da una porzione di area di pelle con l'aria o acqua è proporzionale alla superficie di contatto e alla differenza di temperatura, ma non dipende dalla posizione sul corpo. Il coefficiente di proporzionalità vale $26\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$ per l'aria e $600\,\mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$ per l'acqua.

Trovare quanto vale il rapporto

$$\frac{\text{area della parte non immersa del corpo}}{\text{area della parte immersa del corpo}}$$

nella situazione numero 2.

2 Profondità apparente [50 pt.]

Si prendano due pareti identiche, infinitamente lunghe e di spessore s, parallele, i cui bordi interni distano d. Entrambe presentano una finestra circolare di raggio r riempita con un materiale trasparente di indice di rifrazione n e spessore s. I centri delle due aperture sono perfettamente allineati. Alice e Bob sono posizionati da parti opposte e guardano (con un solo occhio) dall'esterno verso l'interno delle pareti attraverso le finestre. Essi sanno che nella zona racchiusa dalle pareti, su un punto dell'asse congiungente i centri delle finestre, giace una sorgente luminosa puntiforme isotropa.

Spostandosi su tutta la superficie della sua finestra, Alice vede la sorgente sempre ad una distanza apparente L dalla superficie esterna della sua parete. Bob invece vede la sorgente cambiare posizione a seconda di come lui si muova.

Si spieghi il motivo della differenza tra ciò che vedono i due osservatori e si calcoli la distanza reale della sorgente dalla parete esterna (dal lato di Alice) in funzione di L, s e n.

3 Lente solare [60 pt.]

Una lente circolare di raggio R e lunghezza focale f è posizionata in modo da far convergere i raggi solari verso un muro nero e spesso. Dati il diametro angolare apparente del Sole (visto dalla Terra) α, e l'intensità della radiazione ricevuta I, calcolare:

1. il diametro dell'immagine del Sole sul muro;
2. la temperatura dell'immagine del Sole sul muro, supponendo che la dispersione del calore per conduzione all'interno del muro o con l'aria sia trascurabile e che il muro possa essere considerato un corpo nero ideale.

Supponiamo ora che la lente e il muro non siano vincolati sulla Terra, ma siano liberamente posizionabili nello spazio.

3. Si spieghi perché, a partire da una certa distanza D dal Sole, l'immagine di quest'ultimo sul muro non sia più ben definita. Supponendo che tutta la radiazione solare abbia una certa lunghezza d'onda λ, si fornisca una stima di D in funzione della distanza Terra-Sole.

Dati numerici: $\alpha = 32'$, $I = 1000\,\mathrm{W/m^2}$, $R = 5\,\mathrm{cm}$, $f = 15\,\mathrm{cm}$, $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$.

4 Lastra in campo magnetico [80 pt.]

Una lastra metallica quadrata (lato $l = 10\,\mathrm{cm}$, spessore $s = 0.1\,\mathrm{mm}$, massa $m = 10\,\mathrm{g}$) è posizionata su un piano orizzontale. Uno dei quattro lati è incernierato al piano, in modo che la lastra sia libera di spazzare un angolo di $\pi/2$, tra la posizione completamente orizzontale e quella verticale. I due lati ortogonali alla cerniera sono collegati ai capi di una batteria che genera una differenza di potenziale $V_0 = 12\,\mathrm{V}$. Il materiale di cui è fatta la lastra ha resistività $\rho = 1.8 \times 10^{-4}\,\Omega\,\mathrm{m}$ e il collegamento alla batteria è fatto in modo che la corrente scorra uniformemente nel volume della lastra.

La lastra è soggetta alla forza di gravità ed è immersa in un campo magnetico uniforme e costante con direzione perpendicolare al piano orizzontale e modulo $B_0 = 0.20\,\mathrm{T}$. Sia θ l'angolo che la lastra forma con il piano.

1. Quale dev'essere il verso del campo magnetico affinché esista una posizione di equilibrio per un certo $\theta_0 \neq 0$?
2. Quanto vale θ_0?

3. L'equilibrio è stabile?

La direzione del campo magnetico viene ora mutata da verticale a orizzontale.

4. Per quali condizioni sul campo magnetico la lastra è in equilibrio per qualsiasi angolo θ?

5 Gomma [70 pt.]

Un tubo cilindrico (cavo, omogeneo nel materiale e nello spessore) di gomma elastica, con lunghezza L, raggio R e spessore d (con $d \ll R$ e $d \ll L$) è chiuso alle estremità da due piani infiniti. All'interno del tubo sono presenti n moli di un gas biatomico ideale a pressione atmosferica e il sistema è in equilibrio con l'ambiente esterno.

È noto che un parallelepipedo di dimensioni $d \times L \times 2\pi R$, fatto della stessa gomma del tubo, quando viene stirato lungo il lato di lunghezza $2\pi R$, si comporta elasticamente, con costante di elasticità k. Inoltre, è noto che il parallelepipedo si strappa quando raggiunge una lunghezza pari a ν volte quella iniziale.

Calcolare la quantità minima di calore da dover somministrare al gas per far strappare il tubo assumendo che:

- la gomma e i tappi isolino perfettamente il gas dall'esterno e dunque non ci siano dispersioni di calore;
- il calore sia somministrato abbastanza lentamente da poter considerare la trasformazione quasistatica.

Valori numerici: $\nu = 1.2$, $n = 10\,\mathrm{mol}$, $k = 10^5\,\mathrm{N/m}$, $p_{\mathrm{atm}} = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $R = 0.5\,\mathrm{m}$, $L = 1.0\,\mathrm{m}$.

6 Oscillatore con massa variabile [110 pt.]

Un contenitore di massa trascurabile e volume V è riempito con un gas monoatomico (numero di moli iniziale n, massa molare μ) tenuto a una temperatura costante T. Il contenitore è collegato ad un muro da una molla ideale di costante elastica k e lunghezza a riposo l_0. L'ambiente in cui si trova il contenitore è privo di aria.

Inizialmente il contenitore è chiuso e fermo. Il contenitore viene spostato di Δl e poi rilasciato. Si trascuri l'attrito tra contenitore e pavimento e il tempo di rilassamento delle perturbazioni indotte dalle oscillazioni nel gas.

1. Trovare la legge oraria del contenitore a partire dall'istante di rilascio. Indicare con $x(t)$ lo spostamento del contenitore dalla posizione di equilibrio.

2. Calcolare il valore medio su un periodo dell'energia cinetica K dell'oscillatore in termini della sua energia meccanica totale E.

Viene ora effettuato un foro di area A sulla superficie superiore del contenitore. Il foro è molto più piccolo delle dimensioni del contenitore, ma molto più grande delle dimensioni delle particelle di aria e gas.

3. Mostrare che, a partire dall'istante in cui viene effettuato il foro, la massa del gas $m(t)$ varia secondo la seguente legge esponenziale:

$$m(t) = \mu n \, e^{-\frac{A}{V}\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}t}.$$

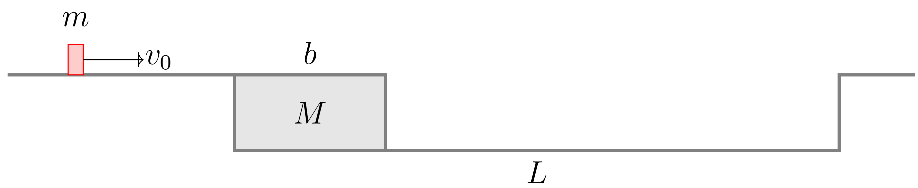
Si supponga nel seguito di poter sempre considerare costante la quantità di gas nel contenitore per la durata di un periodo di oscillazione $\tau(t)$ (ovvero che si abbia, per ogni t preso qui in considerazione, $\frac{dm(t)}{dt}\tau(t) \ll m(t)$).

4. Rappresentare il moto del contenitore per un fissato valore di $m(t)$ in un piano cartesiano riportando sull'asse delle ordinate la quantità di moto p del contenitore lungo la direzione del moto e sull'asse delle ascisse il suo spostamento x rispetto alla posizione di equilibrio.

5. Determinare il rapporto tra l'energia meccanica quando metà del gas è uscito e l'energia meccanica iniziale. Ripetere il calcolo sostituendo l'energia meccanica con l'ampiezza delle oscillazioni.

6. Con riferimento al piano cartesiano introdotto nel punto 4, è possibile dare una interpretazione geometrica delle relazioni trovate al punto 5?

7 Blocco traghettato [100 pt.]



In un piano è presente una scanalatura di lunghezza L, al cui interno è posta una slitta di massa M e lunghezza b che può muoversi senza attrito. Se la slitta urta la parete destra della scanalatura, vi rimane attaccata anelasticamente.

Un blocchetto puntiforme di massa m viene lanciato con velocità $v_0 > 0$ verso la scanalatura; tra blocchetto e slitta è presente dell'attrito con coefficiente μ (sia statico, sia dinamico).

1. Quale condizione va posta su m, M, L e b affinché, per qualunque valore di v_0, o il blocchetto cada nella scanalatura, oppure, un istante prima dell'urto della slitta contro la parete, la velocità relativa dei due corpi (blocchetto e slitta) sia nulla?

Nel seguito, si supponga che i parametri del problema rispettino la relazione individuata al punto 1.

2. Sotto quali condizioni su v_0, m, M, L e b il blocchetto cade nella scanalatura?

3. Sotto quali condizioni su v_0, m, M, L e b il blocchetto viene traghettato con successo e lascia la slitta passando dall'altro lato della scanalatura?

8 Vassoi della mensa [100 pt.]

Consideriamo un parallelepipedo di massa m posizionato su un piano (infinito) inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale. Il parallelepipedo è orientato in modo che due tra le sue quattro facce laterali siano parallele alla proiezione di $\vec{g}$ sul piano inclinato.

Una di queste due facce è appoggiata su un muro infinito che si sposta lungo il piano inclinato alla velocità costante $\vec{v}_0$ perpendicolarmente a se stesso (cioè $\vec{v}_0$ è perpendicolare alla proiezione di $\vec{g}$ sul piano). Inoltre $\vec{v}_0$ è diretta in modo che il muro, durante il suo moto, trascini con sé il parallelepipedo.

Il coefficiente d'attrito (sia statico, sia dinamico) tra il parallelepipedo e il piano è μ_1, mentre quello tra il parallelepipedo e il muro è μ_2. Si supponga che la forza d'attrito tra muro e parallelepipedo sia sempre parallela al piano.

1. Se il parallelepipedo è inizialmente fermo rispetto al muro, per quali valori dei parametri continuerà a rimanere tale?

2. Per quali valori dei parametri è possibile che il parallelepipedo continui ad accelerare indefinitamente, data un'appropriata velocità iniziale?

3. Per quali valori dei parametri è possibile che il parallelepipedo raggiunga, dopo sufficiente tempo, una velocità limite finita e diversa da zero (rispetto al muro)?

9 Oscillazioni dentro un tubo [100 pt.]

Un tubo cilindrico di raggio R è fissato al terreno in modo che non possa né rotolare né traslare e che il suo asse di simmetria sia parallelo al terreno. Al suo interno viene inserito un cilindro pieno di raggio r. Questo cilindro è vincolato a rimanere sempre in contatto con la superficie interna del tubo ed è soggetto all'accelerazione di gravità $\vec{g}$. Studiamo il moto del cilindro nel tubo in due casi distinti:

1. Supponendo che la superficie interna del tubo sia perfettamente liscia e che il cilindro sia collegato all'asse del tubo in modo che gli assi di tubo e cilindro siano paralleli e che il punto del cilindro in contatto con la superficie interna del tubo sia sempre lo stesso, si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

2. Supponendo ora che il cilindro sia vincolato a rotolare senza strisciare sulla superficie interna del tubo, si calcoli il periodo delle piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

10 Tungsteno vs LED [100 pt.]

Le lampadine a incandescenza sono uno dei modi più facili di generare luce. Prendiamo un filamento di tungsteno di resistenza $500\,\Omega$ e area $A = 40\,\mathrm{mm}^2$ e colleghiamone i capi a quelli di un generatore di tensione continua $220\,\mathrm{V}$.[1]

1. Calcolare l'intensità di corrente che scorre attraverso la lampadina.

2. Supponendo che il 20% dell'energia prodotta per effetto Joule venga dissipata per conduzione con l'aria e il resto venga emesso come luce, calcolare la temperatura raggiunta dal filamento, assumendo che sia un corpo nero.

3. Per ridurre gli sprechi di energia, sarebbe desiderabile far coincidere il picco delle emissioni della lampadina con il picco della sensibilità dell'occhio umano (luce verde a circa $550\,\mathrm{nm}$). Quale sarebbe la temperatura corrispondente?

[1] Sarebbe più realistico considerare un generatore di tensione alternata a frequenza $f = 50\,\mathrm{Hz}$, ma useremo questo per semplicità.

Una soluzione che consente di produrre luce visibile senza raggiungere temperature troppo elevate sono i LED (Light Emitting Diode), che sfruttano un processo noto come elettroluminescenza. Per costruire un LED, è necessario disporre di due diversi tipi materiale semiconduttore a cui sono state aggiunte (in genere artificialmente) delle impurità, con lo scopo di creare elettroni (o “lacune di elettroni”) liberi di muoversi nel materiale. Quando questi due pezzi vengono messi in contatto, creando quella che viene definita una giunzione, si genera una differenza potenziale ΔV_{jun} tra essi. Quando un portatore di carica passa attraverso la giunzione, converte l’energia potenziale in luce emettendo un fotone.

4. A quale lunghezza d’onda emetterà un diodo con $\Delta V_{\text{jun}} = 2.2\,\text{V}$?

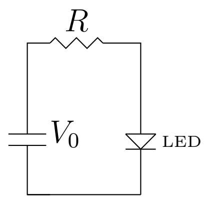
I semiconduttori con cui sono costruiti i LED hanno solitamente indici di rifrazione elevati; consideriamo, nel nostro caso, il valore $n = 3.96$.

5. Supponiamo di avere un LED a forma di parallelepipedo, al cui interno è presente la giunzione (molto piccola rispetto alle dimensioni del parallelepipedo) che produce luce isotropicamente. Quale percentuale della luce riesce a fuoriuscire?

6. Supponiamo di avere un LED a forma di semisfera, con la giunzione molto vicina al centro geometrico della sfera. Quale percentuale della luce fuoriesce dalla parte semisferica (e non da quella piatta) del LED?

7. Supponiamo che la luce intrappolata si dissipi scaldando il materiale, che la riemetterà poi per irraggiamento come luce “non utile”. A parità di intensità luminosa “utile” emessa, è più caldo un filamento di tungsteno o un LED a forma di parallelepipedo?

Vogliamo accendere un LED che emette a $620\,\text{nm}$ usando una intensità di corrente pari a $20\,\text{mA}$, per mezzo del circuito in figura, in cui $V_0 = 9\,\text{V}$. Si condsideri che ogni LED produce una caduta di tensione che è circa il 20% superiore rispetto a quella della giunzione, a causa di effetti resistivi.



8. Quanto deve valere la resistenza R?

9. Quanto vale l’efficienza percentuale del LED, definita come il rapporto tra la potenza luminosa emessa e la potenza dissipata nel circuito? Si supponga che tutta la luce riesca ad uscire dal LED.

11 Due proiettili [100 pt.]

Due proiettili (che chiameremo A e B), soggetti all'accelerazione di gravità $\vec{g} = -g\hat{y}$, vengono sparati dal punto $(x, y) = (0, 0)$ contemporaneamente e con stessa velocità iniziale v_0. Tuttavia, gli angoli di lancio rispetto all'orizzontale sono diversi: li chiameremo α e β rispettivamente. All'istante t viene scattata una foto, in cui si vedono i due oggetti trovarsi nei punti di seguenti coordinate:

$$(x_A, y_A) = (3\,\mathrm{m}, 6\,\mathrm{m}) \qquad (x_B, y_B) = (5\,\mathrm{m}, 5\,\mathrm{m}).$$

Usando $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$, si calcolino t, v_0, α e β.

12 Sfera con cavità [90 pt.]

È data una sfera piena di rame (densità $\rho_{\mathrm{Cu}} = 8960\,\mathrm{kg/m^3}$) di raggio $R = 70\,\mathrm{cm}$.

1. Si descriva il campo gravitazionale generato dalla sfera, in funzione della distanza r dal suo centro.

   Il campo gravitazionale generato dalla sfera ha un massimo? In caso affermativo, dire in quali punti dello spazio il campo è massimo, e quanto vale il modulo del campo in tali punti.

Si consideri ora un'altra sfera di rame, sempre di raggio $R = 70\,\mathrm{cm}$, ma con due cavità sferiche (con intersezione nulla) di raggio rispettivamente $r_1 = 43\,\mathrm{cm}$ e $r_2 = 27\,\mathrm{cm}$.

2. Considerando solo i punti del diametro della sfera passante per i centri delle due cavità, a quale distanza dal centro della sfera il modulo del campo gravitazionale è minimo?

3. Sia ora P il punto (appartenente al diametro precedentemente considerato) in cui il modulo del campo gravitazionale è minimo, e sia Q il simmetrico di P rispetto al centro della sfera. Quando vale il modulo del campo gravitazionale in Q?