

Soluzione dei problemi di ammissione allo Stage di Fisica a Pisa 2020

Lo staff dello Stage

23 dicembre 2019

1 Produzione di vapore [50pt]

1. L'equilibrio termico è raggiunto quando la potenza assorbita dal disco uguaglia quella emessa, dal disco stesso, per irraggiamento. La prima si ottiene moltiplicando l'area di una faccia del disco per l'irradianza,

$$P_{\text{assorbita}} = \pi r^2 I,$$

mentre la seconda si ottiene dalla legge di Stefan-Boltzmann,

$$P_{\text{emessa}} = \sigma(2\pi r^2 + 2\pi r h)T^4.$$

Uguagliando le due, troviamo la temperatura d'equilibrio del disco T_d :

$$P_{\text{assorbita}} = P_{\text{emessa}} \implies T_d = \left(\frac{I}{2\sigma} \frac{r}{r+h} \right)^{1/4} \approx 532 \text{ K}.$$

2. Quando il disco viene inserito nell'acqua (la quale si trova ad una temperatura iniziale $T_a = 20^\circ\text{C}$), inizia ad esserci scambio di calore fino al raggiungimento dell'equilibrio (o fino alla vaporizzazione completa dell'acqua). La temperatura del disco diminuirà fino alla fine, mentre quella dell'acqua cesserà di aumentare una volta arrivata a $T_e = 100^\circ\text{C}$: tutto il calore scambiato dopo aver raggiunto il punto di ebollizione servirà a rompere i legami tra le molecole d'acqua e costituirà dunque il calore latente. Nell'ipotesi che si produca una massa di vapore m_v tale che $0 < m_v < m_a = 1 \text{ kg}$, avremo che, all'equilibrio, il disco e l'acqua rimanente avranno entrambi una temperatura di 100°C e che

$$C(T_d - T_e) = m_a c_a (T_e - T_a) + m_v \lambda,$$

da cui

$$m_v = \frac{C(T_d - T_e) - m_a c_a (T_e - T_a)}{\lambda} \approx 62.5 \text{ g}.$$

3. Possiamo usare la formula precedente prendendo il caso limite $m_v = m_a$, ottenendo quindi

$$m_a = \frac{C(T_d - T_e)}{c_a(T_e - T_a) + \lambda} \approx 183 \text{ g.}$$

4. Imponendo invece il caso limite opposto, $m_v = 0$, troviamo

$$m_a = \frac{C(T_d - T_e)}{c_a(T_e - T_a)} \approx 1.42 \text{ kg.}$$

2 Suono di una chitarra [50pt]

Valutiamo l'energia totale emessa dalla corda vibrante in forma di onde sonore, la distribuzione è isotropa, dunque valutiamo l'energia uscente da una sfera di raggio D al tempo t

$$\frac{dE_{\text{sound}}}{dt} = 4\pi D^2 I(t)$$

chiamando $I_0 = 1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ e $t_0 = 4 \text{ s}$, integrando l'espressione sopra o più semplicemente valutando l'area sottesa al grafico si ha

$$E_{\text{sound}} = 4\pi D^2 \frac{I_0 t_0}{2}$$

Ora come da ipotesi questa corrisponde a tutta l'energia dissipata dalla corda. Valutiamo allora l'energia nel momento in cui raggiunge la massima tensione e nel momento in cui il moto è finito.

Sia ΔL l'allungamento della corda rispetto alla posizione iniziale, chiaramente

$$\Delta L = 2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + x^2} - L \simeq \frac{2x^2}{L}$$

giustificato dallo sviluppo in serie $\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{2}$ valido per $x \ll 1$. Ancora prima di essere tesa ulteriormente la corda ha un allungamento iniziale che produce la tensione T , in particolare è

$$\Delta L_0 = \frac{T}{k}$$

Ora l'energia iniziale prima del rilascio sarà

$$E_i = \frac{1}{2}k(\Delta L + \Delta L_0)^2$$

e quella al termine del moto

$$E_f = \frac{1}{2}k\Delta L_0^2$$

La conservazione dell'energia impone

$$E_i - E_f = E_{\text{sound}} = \frac{1}{2}k(\Delta L^2 + 2\Delta L_0\Delta L)$$

risolvendo l'equazione di secondo grado in ΔL si ha

$$\Delta L = -\Delta L_0 \pm \sqrt{\Delta L_0^2 + \frac{2E_{\text{sound}}}{k}}$$

la soluzione fisica è chiaramente quella positiva.

$$x = \sqrt{\frac{L}{2k} \left(\sqrt{T^2 + 2kE_{\text{sound}}} - T \right)} \simeq 1.77 \text{ mm}$$

Specifichiamo un aspetto importante, come si è visto

$$E_i - E_f = \frac{1}{2}k(\Delta L^2 + 2\Delta L_0\Delta L)$$

si noti che in generale non è lecito trascurare il termine quadratico in ΔL , rispetto a quello lineare, lo sarebbe se $\Delta L \ll \Delta L_0$ (che è in effetti vero per coincidenza dei dati sperimentali dati, ma la soluzione generale non deve tenere conto di questo aspetto perchè non era un'approssimazione data dal testo del problema).

3 Pallone sonda [50pt]

1. La pressione è data dall'equazione di stato

$$p = \frac{mRT}{MV} \quad (1)$$

e numericamente

$$p = 20.3 \text{ kPa} \quad (2)$$

2. Dobbiamo imporre l'equilibrio idrostatico, i.e. (il pallone è rigido!)

$$\rho(z)V = m + m_0 \quad (3)$$

e quindi

$$z_{\text{eq}} = -z_0 \log \frac{m + m_0}{\rho_0 V} \quad (4)$$

Numericamente

$$z_{\text{eq}} = 19.3 \text{ km} \quad (5)$$

3. Un pochino sopra z_{eq} , la pressione atmosferica è più bassa, dunque il pallone tende a scendere. Viceversa, un pochino sotto z_{eq} la pressione atmosferica è più alta e il pallone tende a salire. L'equazione del moto del pallone è

$$(m + m_0)\ddot{z} = -(m + m_0)g + \rho(z)Vg \quad (6)$$

In particolare, si usa il valore di g alla quota di equilibrio, $g = 9.76 \text{ m/s}^2$.
 Espandendo al prim'ordine intorno a z_{eq} , posto $z = z_{\text{eq}} + x$, $x \ll z_{\text{eq}}$

$$\ddot{x} \simeq x \frac{\rho'(z_{\text{eq}})V}{m + m_0} g = -g \frac{x}{z_0} \quad (7)$$

L'equazione del moto è quella di un moto armonico, con periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{z_0}{g}} = 201 \text{ s} \quad (8)$$

4 Circuiti non lineari [80pt]

4.1

La resistenza dell'elemento, quando passa una corrente i , è:

$$R_X = \rho \frac{l}{S} = \rho k i$$

sostituendo in

$$V_X = R_X i$$

si ottiene la curva caratteristica

$$\implies i = \sqrt{\frac{V}{\rho k}} \quad (9)$$

Il grafico è riportato in Figura 1

4.2

L'equazione della maglia per il circuito in considerazione è:

$$V_0 = R i_0 + \rho k i_0^2$$

la soluzione accettabile è quella positiva, ossia

$$i_0 = \frac{\sqrt{R^2 + 4\rho k V_0} - R}{2\rho k}$$

4.3

La retta di carico è il vincolo che gli altri elementi del circuito impongono su quello non lineare, cioè:

$$\begin{aligned} V_X + R i &= V_0 \\ \implies i &= \frac{V_0 - V_X}{R} \end{aligned}$$

se non sapessimo nulla sull'elemento X , questa retta è l'insieme delle coppie (i, V_X) a cui potenzialmente può lavorare l'elemento non lineare.

La corrente di lavoro i_0 è l'ordinata dell'intersezione di questa retta con la curva (9). Vedere Figura 1

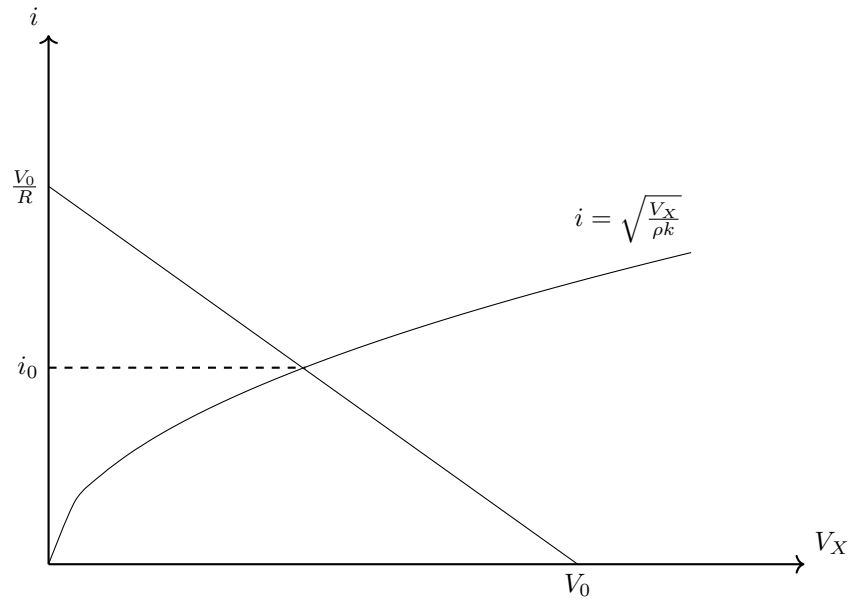


Figura 1: Problema 4

4.4

Sia i il valore della corrente misurato dall'amperometro, i_1 la corrente che passa nel ramo con un solo elemento X e i_2 la corrente nel ramo con due elementi X . Valgono, per le leggi di kirchhoff le due equazioni:

$$i_1 + i_2 = i \quad (10)$$

$$\rho k i_1^2 = 2\rho k i_2^2 \quad (11)$$

dalla seconda segue

$$\implies i_1 = \sqrt{2}i_2$$

e combinandola insieme alla prima si ha

$$i_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}i$$

la caduta di potenziale ai capi dei rami contenenti gli elementi X è:

$$V_X = \rho k i^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \right)^2 = \frac{2}{3+2\sqrt{2}} \rho k i^2 = a \rho k i^2$$

con $a = 2/(3+2\sqrt{2})$.

se nel punto 4.2 mandassimo

$$\rho k \rightarrow a \rho k$$

otterremmo la stessa equazione; quindi per la corrente basta fare questa sostituzione nella soluzione trovata nel 4.2.

$$i = \frac{\sqrt{R^2 + 4a\rho k V_0} - R}{2a\rho k}$$

5 Diapason e pianeti alieni [70pt]

5.1

La sorgente di onde (il diapason) è in movimento, avvicinandosi all'osservatore, con velocità che giace lungo la congiungente tra essa e l'osservatore. La frequenza percepita dal rilevatore risente dunque dell'effetto Doppler e dipende dalla frequenza emessa dalla sorgente seguendo la relazione

$$f(t) = \frac{f_0 v_s}{v_s - v(t)}$$

dove s è indicato con v_s la velocità del suono nel mezzo di propagazione dato (l'atmosfera del pianeta). Il diapason, trascurando l'attrito, è sottoposto alla sua sola forza peso, dunque è in moto di caduta libera. Il modulo della velocità in funzione del tempo in questo tipo di moto è descritta dall'equazione

$$v(t) = v(0) + gt$$

dove $v(0)$ è la velocità del diapason all'istante $t = 0$, che in questo problema sappiamo essere nulla. Sostituendo all'interno della formula dell'effetto doppler si ottiene quindi l'equazione cercata per la frequenza percepita a terra in funzione del tempo:

$$f(t) = \frac{f_0 v_s}{v_s - gt}$$

NB molti hanno scritto un'equazione in funzione di una coordinata spaziale h che indicava di quanto era caduto l'oggetto ad un dato istante. Non era richiesto, oltre a creare grande confusione di notazione in quanto h nel testo del problema non era una variabile, ma una *costante*: l'altezza di lancio del diapason rispetto all'osservatore a terra.

5.2

Linearizzando la relazione ottenuta al punto precedente si ottiene

$$\frac{f_0 v_s}{f(t)} = -gt + v_s$$

Inserendo i dati in tabella si ottiene il grafico in figura

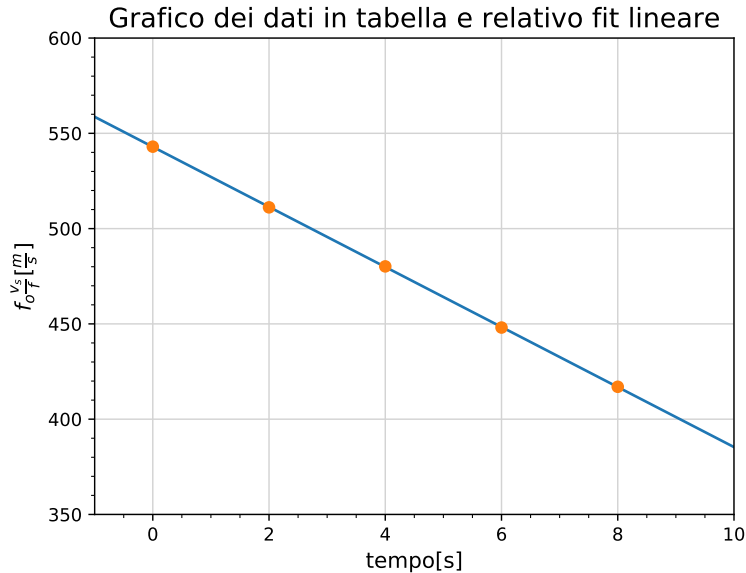


Figura 2: grafico per il calcolo di g .

Interpolando i punti con un fit lineare usando la calcolatrice od il computer si ottiene che il coefficiente angolare della retta di fit è

$$-g = (-15.75 \pm 0.05) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

che è l'accelerazione di gravità richiesta. Si sono considerati corretti valori numerici anche al di fuori delle barre di errore, purchè fossero coerenti con il metodo utilizzato e quest'ultimo fosse esplicitamente descritto e considerato tra i seguenti. Metodi accettati

- Fare il grafico a mano e calcolare a mano il coefficiente angolare della retta che approssima meglio i punti
- Calcolare g per ogni coppia di valori in tabella e considerare come valore più probabile la media aritmetica

Metodi non accettati (non significa da Opt, ma non hanno fatto ottenere il massimo)

- riportare solo un dato numerico senza giustificare o sottolineare come lo si è ottenuto.
- prendere solo una coppia di valori dalla tabella e considerare il solo valore di g ottenuto da questi

5.3

In un moto rettilineo uniformemente accelerato si ha

$$v(t) = \sqrt{2g\Delta s(t) + v(0)^2}$$

Nel nostro sistema abbiamo $v(0) = 0$ da cui si ha che la velocità del diapason quando impatta con il suolo è

$$v_h = \sqrt{2gh}$$

Invertendo la formula dell'effetto Doppler si ottiene

$$v_h = \frac{(f_1 - f_0)v_s}{f_1}$$

con f_1 frequenza percepita dall'osservatore al momento dell'impatto del diapason con il suolo. Eguagliando le due equazioni si ottiene

$$h = v_s^2 \frac{(1 - \frac{f_0}{f_1})^2}{2g} = 770 \text{ m}$$

NB si consideri che nella valutazione dei numerici è stata considerata la coerenza: si sono controllati i risultati con i valori di g espressi dal candidato.

5.4

Il diapason se cade da oltre una certa altezza arriva al suolo con una velocità prossima a quella del suono (che in realtà non raggiunge grazie all'attrito con l'aria). Per queste velocità perde validità la formula dell'effetto Doppler, su cui si basava l'esperimento. Per avere un ordine di grandezza per l'altezza di lancio a cui ciò avviene si può imporre che la velocità con cui arriva a terra il diapason, trascurando ancora una volta l'attrito, sia quella del suono, da cui

$$h_{\max} = \frac{v_s^2}{2g} = 9360 \text{ m}$$

Questa si tratta solo di una stima, poichè in realtà l'attrito, come scritto prima, a queste velocità non si può trascurare, ma è lecito utilizzarla per ricavare un ordine di grandezza. In questo caso dunque l'esperimento non ha senso se si lancia il diapason da più di

$$1 \times 10^4 \text{ m}$$

Era esplicitamente richiesto di trascurare il ritardo dell'informazione dovuto alla finitezza della velocità del suono (che comunque avrebbe inferito in ugual modo a piccole e grandi altezze di lancio in quanto le velocità del diapason agli istanti iniziali di caduta sono le stesse considerando g costante).

5.5

Il diapason è in orbita circolare attorno alla luna, dunque ha una velocità tale per cui la sua forza peso funge completamente da forza centripeta

$$\frac{v^2}{h + R} = g'$$

Dato che $h \ll R$ non era necessario considerare la variazione di accelerazione di gravità tra l'altezza da terra del diapason e la superficie. Il problema chiedeva di approssimare la traiettoria del diapason con una retta; per ottenere la frequenza percepita a terra dall'osservatore, bisogna utilizzare la formula dell'effetto Doppler indicata in precedenza, ma considerando solamente la componente della velocità del diapason lungo la congiungente tra esso e l'osservatore (è intuitivo pensare che, dato che il suono si propaga in linea retta, l'unica velocità della sorgente che influisce sulla sua frequenza percepita da un osservatore esterno è quella lungo il futuro percorso dell'onda). Seguendo il sistema di coordinate descritto dal problema, con asse x orientato secondo la direzione del diapason, si ha che la proiezione della velocità del diapason lungo la congiungente con l'osservatore è

$$v_{\text{obs}} = v \cos \theta = v \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

con θ angolo tra la congiungente tra l'origine ed il diapason e la congiungente tra l'osservatore ed il diapason. Sostituendo il tutto nella formula dell'effetto Doppler si ottiene

$$f(x) = \frac{f_0 v_s}{v_s + x \sqrt{\frac{g'(h+R)}{x^2 + h^2}}}$$

con segno $+$ in quanto per ascisse positive data l'orientazione del sistema di coordinate il Diapason si sta allontanando dall'osservatore. Sostituendo il valore $x = 20$ m si ottiene

$$f(20 \text{ m}) = 232 \text{ Hz}$$

Al limite x che tende a infinito, in entrambi i versi si ha che $|\frac{x}{h}| \gg 1$, il che comporta che si può trascurare il fattore h^2 rispetto al fattore x^2 al denominatore della formula dell'effetto Doppler. In questi casi dunque si ottiene che la velocità proiettata lungo la congiungente va a coincidere con la velocità stessa del diapason. Sostituendo si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{f_0 v_s}{v_s + \sqrt{g(R+h)}} = 224 \text{ Hz}$$

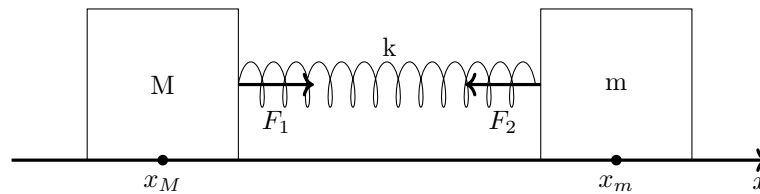
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{f_0 v_s}{v_s - \sqrt{g(R+h)}} = 561 \text{ Hz}$$

6 Bilancia per astronauti [70pt]

1. Sapendo che il periodo di una molla di costante elastica k a cui è attaccata una massa m vale $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ possiamo trovare la massa della sedia usando la formula inversa:

$$m = \frac{kT_1^2}{4\pi^2} = 25.51 \text{ kg}$$

2. Possiamo vedere il problema come una molla ai cui estremi sono attaccate le masse m e M . Mettiamoci in un sistema di coordinate con l'asse x coassiale con la molla e indichiamo con x_m e x_M le posizioni delle due masse. La forza esercitata ai due estremi della molla è uguale in modulo ma in verso opposto nei due punti (per il terzo principio della dinamica). Per la legge di Hooke si ha $|F_{1,2}| = k|x_m - x_M - l_0|$ dove l_0 è la lunghezza a riposo della molla (in particolare nella figura i due corpi sono molto grossi solo per chiarezza ma in realtà possono essere trattati come punti materiali).



Applicando ora il secondo principio della dinamica a entrambe le masse si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_m}{dt^2}(t) = -k(x_m(t) - x_M(t) - l_0) \\ M \frac{d^2 x_M}{dt^2}(t) = k(x_m(t) - x_M(t) - l_0) \end{cases}$$

Dividiamo entrambi i membri della prima equazione per m e quelli della seconda per M . Sottraiamo ora membro a membro la seconda equazione dalla prima e chiamiamo $\Delta l(t) := x_m(t) - x_M(t) - l_0$. Per linearità dell'operatore derivata e poichè la derivata di una costante è nulla, si ha $\frac{d^2 \Delta l}{dt^2}(t) = \frac{d^2 x_m}{dt^2}(t) - \frac{d^2 x_M}{dt^2}(t)$ e quindi:

$$\frac{d^2 \Delta l}{dt^2}(t) = -k \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right) \Delta l(t)$$

Questa è la stessa equazione che si otterrebbe considerando un corpo di massa $\mu = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} \right)^{-1}$ attaccato ad una molla incernierata a un estremo¹.

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{(M+m)k}} \quad (12)$$

¹Tale massa compare talmente spesso nella risoluzione di sistemi a due corpi che si merita un nome: massa ridotta!

$$M = \frac{kmT_2^2}{4\pi^2m - kT_2^2} = \frac{m}{\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 - 1} = 1039 \text{ kg}$$

Un altro modo per risolvere il problema è vedere la molla come due molle più piccole in serie tra loro e collegate nel centro di massa del sistema. In questo caso bisogna usare la formula della costante elastica effettiva di due molle in serie e imporre che il centro di massa del sistema sia effettivamente fermo.

Notare che la lunghezza a riposo della molla non influisce sul risultato e dunque ometterla non è stato considerato un errore.

Un'altra cosa interessante da notare è che nel limite $M \rightarrow +\infty$ l'equazione 12 diventa la familiare formula del periodo di una molla. In effetti questo è proprio il caso del primo punto del problema: la molla è infatti attaccata alla Terra che però ha massa molto maggiore di quella della sedia (di un fattore 10^{23}).

3. Il sistema è identico a quello precedente dove però al posto di m si ha $(m + m_a)$ e invece di T_2 si ha T_3 . Inoltre si può notare che la formula del periodo ottenuta nell'equazione 12 è simmetrica nelle due masse. Quindi:

$$m + m_a = \frac{kMT_3^2}{4\pi^2M - kT_3^2}$$

$$m_a = \frac{kMT_3^2}{4\pi^2M - kT_3^2} - m = 65.06 \text{ kg}$$

7 Allungamento di una molla slinky [80pt]

7.1

Questo primo punto poteva essere risolto in diversi modi. Un primo modo è ricordarsi come si comportano N molle di uguale costante elastica k messe in serie. La costante elastica complessiva vale

$$\frac{1}{K_{\text{eff}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{k_i} = \frac{N}{k} \longrightarrow K_{\text{eff}} = \frac{k}{N}$$

Il problema che noi dobbiamo risolvere è quello opposto: data la costante elastica complessiva, trova quella della molla piccola. Segue allora che

$$k_{\text{mollicina}} = NK_{\text{molla}}$$

Questo è molto sensato, perché se dimezziamo una molla facciamo più fatica a farla contrarre o allungare di uno stesso tratto lungo x . Un altro modo per trovare il risultato è usare l'energia elastica, ma è quasi totalmente analogo al primo. Da ora in poi chiameremo $k' \equiv k_{\text{mollicina}}$.

7.2

La molla numero i_0 subisce la forza peso di i_0 molle, quindi l'equilibrio impone

$$i_0 \frac{M}{N} g = k' L_{i_0}$$

Perché il tratto al di sotto di i_0 non si allunghi, bisogna che $L_{i_0} = \frac{L}{N}$. Sostituendo le quantità note e ricordando la definizione di α si ottiene

$$i_0 = \frac{L_0 k}{Mg} N = \alpha N$$

7.3

Consideriamo una qualsiasi piccola molla con $i > i_0$, la forza che tende a tirarla verso il basso è pari al suo peso più il peso di tutte le molle che stanno al di sotto di essa. L'equilibrio delle forze impone al solito che il peso sia uguale alla forza elastica, quindi

$$k' l_i = \frac{M}{N} g i$$

Sostituendo le quantità note si trova banalmente

$$l_i = \frac{Mg i}{kN^2} = \frac{i L_0}{\alpha N^2}$$

7.4

La lunghezza totale della molla è la somma di tutte le lunghezze delle piccole molle

$$H = i_0 l_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^N l_i = \alpha L_0 + \sum_{i=\alpha N+1}^N \frac{L_0 i}{N^2 \alpha} = \alpha L_0 + \sum_{i=1}^N \frac{L_0 i}{N^2 \alpha} - \sum_{i=1}^{\alpha N} \frac{L_0 i}{N^2 \alpha}$$

Sviluppando le sommatorie come suggerito nella traccia, si ottiene

$$H = L_0 \alpha + \frac{L_0}{\alpha N^2} \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N^2 \alpha^2}{2} \right) = L_0 \alpha + \frac{L_0}{2\alpha} - \frac{L_0 \alpha}{2} = \frac{L_0}{2\alpha} (1 + \alpha^2)$$

8 Giù da uno scalino ★ [100pt]

8.1

Si può iniziare ragionando qualitativamente: se la velocità v è sufficientemente piccola, la ruota raggiunge il bordo dello scalino e vi gira intorno; se la velocità è abbastanza elevata la ruota compie invece un moto parabolico come se venisse lanciata con velocità iniziale orizzontale.

Per prima cosa si nota che l'energia si conserva, in quanto la forza d'attrito (necessario perché sia verificata l'ipotesi di puro rotolamento in ogni punto) è

applicata al bordo della ruota che è istantaneamente fermo. L'energia cinetica totale della ruota è:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Dove I è il momento d'inerzia rispetto al centro della ruota, che, data la forma a cilindro omogeneo di quest'ultima, vale $\frac{1}{2}mR^2$. La condizione di puro rotolamento si traduce inoltre in $\omega = \frac{v}{R}$. Da queste considerazioni si ricava:

$$K = \frac{3}{4}mv^2$$

Si nota che questa condizione è valida anche quando la ruota gira intorno al bordo dello scalino, in quanto anche in quel caso il moto è di puro rotolamento e l'attrito non compie lavoro.

Considero il moto della ruota quando essa è sul bordo dello scalino: essa ruota intorno allo scalino finché l'angolo tra la verticale e la congiungente tra bordo dello scalino e centro della ruota non raggiunge un valore limite θ . Quando si raggiunge l'angolo limite la ruota si stacca dallo scalino.

La condizione di distacco è che la componente della forza peso lungo la congiungente bordo-centro sia uguale alla forza centripeta richiesta per compiere la rotazione intorno al bordo. Questo perché la velocità cresce man mano che la ruota prosegue il moto (girando scende verso il basso e guadagna energia cinetica) mentre la componente della forza peso diminuisce sempre di più (se l'angolo con la verticale aumenta, il suo coseno diminuisce). La condizione di distacco si traduce dunque in:

$$mg \cos \theta = m \frac{v_d^2}{R}$$

Con v_d velocità al momento del distacco.

La conservazione dell'energia si scrive come:

$$\frac{3}{4}mv^2 + mgR = \frac{3}{4}mv_d^2 + mgR \cos \theta$$

Riscrivo quest'ultima formula in una forma più agevole:

$$v^2 + \frac{4}{3}gR(1 - \cos \theta) = v_d^2$$

Sostituisco la velocità dalla condizione di distacco:

$$v^2 + \frac{4}{3}gR(1 - \cos \theta) = gR \cos \theta$$

$$\frac{v^2}{gR} + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{3}{7} \frac{v^2}{gR} + \frac{4}{7}$$

Che individua univocamente θ in quanto esso è sicuramente compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Si nota che se la velocità supera il valore \sqrt{gR} il coseno è maggiore di 1. Questo si spiega fisicamente in quanto questo è il limite oltre il quale non c'è rotazione intorno al bordo e la ruota compie un moto parabolico con velocità orizzontale v . In particolare, se la velocità supera quel limite, si ottiene che il tempo di volo è $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ (dalla legge oraria del moto rettilineo uniformemente accelerato) e $G = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Se invece la velocità è più bassa, il coseno è minore di 1. La velocità di distacco è (dalla condizione di distacco):

$$v_d = \sqrt{\frac{g}{R} \cos \theta}$$

Dato che la ruota esce da un moto circolare uniforme, essa “parte per la tangente”, cioè la sua velocità è perpendicolare alla retta bordo-centro. Le componenti della velocità lungo l'asse orizzontale \hat{x} (nel verso di \vec{v}) e verticale \hat{y} (verso l'alto, l'origine è posta nel vertice dell'angolo formato da scalino e pavimento) sono:

$$v_x = \cos \theta \sqrt{\frac{g}{R} \cos \theta} \quad v_y = \sin \theta \sqrt{\frac{g}{R} \cos \theta}$$

Dopo il distacco, il moto è parabolico in quanto agisce solo la forza peso. Si ricava dunque il tempo di volo dalla legge oraria lungo \hat{y} :

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 - v_y t + h + R \cos \theta$$

Ponendo $y = R$ e risolvendo l'equazione di secondo grado si ottiene:

$$t_f = \frac{v_y \pm \sqrt{v_y^2 + 2gh + (\cos \theta - 1)R}}{-g}$$

La soluzione con il più dà un valore negativo che non è fisicamente sensato, dunque si prende in considerazione la soluzione con il meno.

L'equazione del moto lungo \hat{x} è $x = v_x t + \sin \theta R$, dalla quale si ricava direttamente:

$$G = \sin \theta R + v_x t_f = R \sin \theta + v_x \frac{-v_y + \sqrt{v_y^2 + 2gh + 2(\cos \theta - 1)R}}{g}$$

$$G = R \left(\sin \theta + \cos^{\frac{3}{2}} \theta \left(-\sin \theta \cos^{\frac{1}{2}} \theta + \sqrt{\sin^2 \theta \cos \theta + 2\frac{h}{R} + 2 \cos \theta - 2} \right) \right)$$

Da cui si ottiene:

$$G = R \left(\sin^3 \theta + \cos^{\frac{3}{2}} \theta \sqrt{\cos \theta \sin^2 \theta + 2 \cos \theta + 2 \left(\frac{h}{R} - 1 \right)} \right)$$

Dove θ è l'unico angolo compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ per cui vale $\cos \theta = \frac{3}{7} \frac{v^2}{gR} + \frac{4}{7}$.

8.2

Perchè G sia minimo serve che θ sia massimo, cioè che la velocità v sia minima. Infatti così facendo si limita il più possibile la quantità di moto lungo \hat{x} e si aumenta anche la componente lungo \hat{y} , riducendo così il tempo di volo. Entrambe riducono il valore di G . Dalla formula di G si nota anche che è dominante il secondo addendo, in quanto la radice è maggiore di 1, dunque conviene ridurre al minimo il coseno.

Per avere la certezza che questo ragionamento sia giusto bisognerebbe ricavare la derivata rispetto a $\cos \theta$ (è più comodo) e verificare che essa non cambia segno tra $\frac{4}{7}$ e 1 (chiamo c il coseno per comodità):

$$G = R \left((1 - c^2)^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}}(-c^3 + 3c + 2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\frac{dG}{dc} = R \left(\frac{3}{2}(-2c)(1 - c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}c^{\frac{1}{2}}(-c^3 + 3c + 2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}c^{\frac{3}{2}}(-3c^2 + 3)(-c^3 + 3c + 2)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

Per c compreso tra $\frac{4}{7}$ e 1 il primo addendo dentro le parentesi è negativo e vale al minimo $-\frac{3}{2}$ (è $-\frac{3}{2} \sin 2\theta$), la somma degli altri due addendi vale (noto che vale $c \geq c^3$):

$$c^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{3}{2}c^3 + \frac{9}{2}c + 3 - \frac{3}{2}c^3 + \frac{3}{2}c}{(-c^3 + 3c + 2)^{\frac{1}{2}}} > \sqrt{\frac{43 + \frac{12}{7}}{2}} > 1.78$$

Da cui ottengo che la funzione è crescente nell'intervallo considerato in quanto la derivata è sempre positiva (vale almeno $1.78R - 1.5R = 0.28R$).

Il $\cos \theta$ minimo si ha chiaramente con $v \rightarrow 0$ da cui:

$$\cos \theta = \frac{4}{7}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{33}}{7}$$

Sostituendo dentro la formula di G si ottiene:

$$G = \frac{88\sqrt{10} + 33\sqrt{33}}{343} R \approx 1.36R$$

9 Tubo con aria e mercurio ★★ [100pt]

1. Partiamo dal primo principio della termodinamica

$$dU = \delta Q - \delta L \quad (13)$$

L'aria é in prima approssimazione trattabile come un gas perfetto. Essendo composto al 78% da azoto e al 21% da ossigeno, possiamo considerarlo biatomico. Essendo $U = nC_V T$ ed essendo per un gas biatomico $C_V = \frac{5}{2}R$, possiamo riscrivere il primo principio della termodinamica come

$$nR \frac{5}{2} dT = nRC dT - p dV \Rightarrow$$

$$C = \frac{5}{2} + \frac{p}{nR} \frac{dV}{dT}$$

Dobbiamo trovare il modo di esprimere quella derivata in funzione di qualcosa che conosciamo della nostra trasformazione. Abbiamo due elementi a disposizione, l'equazione di stato dei gas perfetti

$$pV = nRT \quad (14)$$

che però non dice niente sulla nostra trasformazione. Il vero vincolo di questo problema è il fatto che la pressione dell'aria è determinata dal mercurio che ci sta sopra: in ogni momento, essendo la trasformazione quasistatica, si ha equilibrio meccanico. Di conseguenza, il gas deve sostenere il peso della colonna di mercurio che gli sta sopra, che diminuisce all'aumentare del volume V , dato che trabocca fuori dal tubo e cade all'esterno.

Possiamo dare quantitativamente una formula per la pressione del gas in funzione del suo volume, ovvero $p = p(V)$. Prima di gettarci nei conti, è opportuno notare che i dati numerici sono stati scelti in modo che le espressioni vengano ragionevolmente semplificabili. Infatti, l'altezza $h = 76$ cm, corrisponde ad una pressione p_0 , la pressione atmosferica. Di conseguenza, la pressione del gas sarà uguale alla pressione atmosferica più la colonna di mercurio.

$$p = p_0 + \rho gh' = p_0 + \rho gh_0 \frac{h'}{h_0} = p_0 + p_0 \frac{h'S}{h_0 S} =$$

$$= p_0 \left(1 + \frac{V_0 - V}{\frac{V_0}{2}} \right) = p_0 \left(3 - 2 \frac{V}{V_0} \right)$$

Notare che tornano i casi limite che sono il momento iniziale in cui $V = V_0/2$, in cui la pressione è due volte quella atmosferica, e $V = V_0$ in cui $p = p_0$.

Inseriamo l'espressione nell'equazione di stato dei gas perfetti

$$p_0 \left(3 - 2 \frac{V}{V_0} \right) V = nRT$$

e prendiamo il differenziale a sinistra e a destra dell'uguale.

$$p_0 \left(3 - 4 \frac{V}{V_0} \right) dV = nR dT \Rightarrow \frac{dV}{dT} = \frac{nR}{p_0} \frac{1}{3 - 4 \frac{V}{V_0}}$$

Possiamo ora reinserire questo valore nella espressione trovata precedentemente per C

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{5}{2} + \frac{p}{nR} \frac{dV}{dT} = \frac{5}{2} + \frac{p}{nR} \frac{nR}{p_0} \frac{1}{3 - 4\frac{V}{V_0}} \\
 &= \frac{5}{2} + \frac{3 - 2\frac{V}{V_0}}{3 - 4\frac{V}{V_0}} = \frac{24V - 21V_0}{8V - 6V_0}
 \end{aligned}$$

Era richiesto un grafico della funzione $C(V)$, che viene riportato in Figura 3.

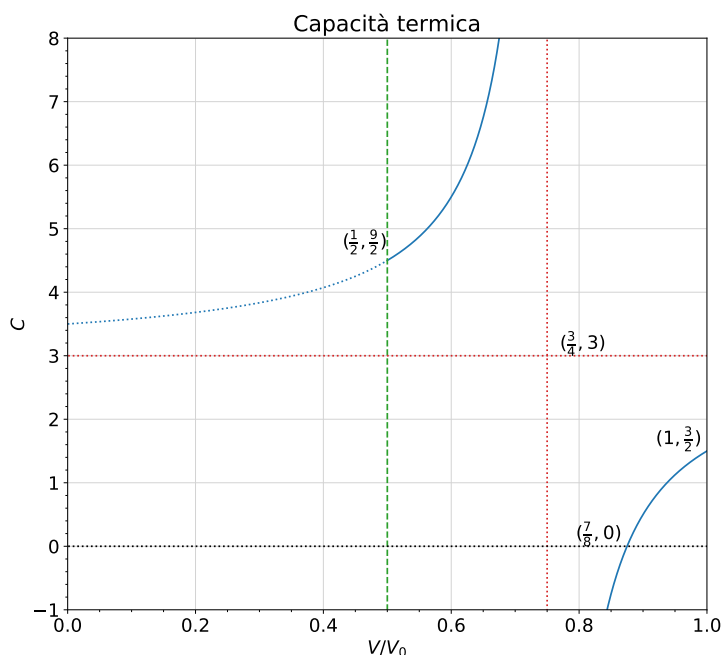


Figura 3: grafico della funzione $C(V)$.

- Prima di addentrarci nello studio dei vari comportamenti di C è opportuno avere un po' di intuizione sul suo significato. La capacità termica di un oggetto, in generale dipende dalla trasformazione a cui è sottoposto. Basti pensare che per i gas di solito vengono dati i calori specifici a volume costante C_V e quello a pressione costante C_p , e sono notoriamente diversi, in quanto vale la relazione $C_p = C_V + R$. Di conseguenza, dire che C è una proprietà dell'oggetto, è *impreciso e incompleto*. È una proprietà sia del corpo, sia della trasformazione.

- $C = 0$ é abbastanza intuitivo, vuol dire che la trasformazione é localmente adiabatca, ovvero non c'è scambio di calore nel momento in cui $C = 0$. É semplice notare che questo accade solo per $V = 7/8V_0$.
- $C \rightarrow \pm\infty$ é altrettanto intuitivo. Leggendo la definizione $\delta Q = nRC dT$, se C tende a infinito, allora anche δQ tenderebbe a infinito, ma questo é fisicamente impossibile. Il modo per impedire questa divergenza é che sia localmente $dT = 0$, ovvero che la temperatura del sistema non vari anche se avviene uno scambio di calore. Questo vuol dire che in quel punto la trasformazione é localmente isoterma e questo avviene a $V = 3/4V_0$.
- Qui era richiesto uno studio piú approfondito della situazione, in quanto succede qualcosa di peculiare. Notiamo che nell'espressione $\delta Q = nRC dT$, solo le quantità n, R sono sicuramente positive, mentre sul segno di $C, dT, \delta Q$ non abbiamo davvero vincoli². Tuttavia, noi possiamo andare a calcolare il segno di dT in funzione del volume, in quanto la temperatura del sistema é fissata dalla legge dei gas.

$$T = \frac{p_0}{nR} V \left(3 - 2 \frac{V}{V_0} \right) \Rightarrow \frac{dT}{dV} = \frac{p_0}{nR} \left(3 - 4 \frac{V}{V_0} \right)$$

Per cui sappiamo che $dT > 0$ se $V < 3/4V_0$ e $dT < 0$ se $V > 3/4V_0$. Questo é importante perché ci dice che:

- Nella regione $V < 3/4V_0$ si ha $C > 0, dT > 0$, per cui $dQ > 0$. In questa zona procede tutto senza problemi.
 - Nella regione $3/4V_0 < V < 7/8V_0$ si ha $C < 0$ ma anche $dT < 0$, per cui complessivamente $\delta Q > 0$ e quindi il gas continua ad assorbire calore dalla parete anche se $C < 0$.
 - Nella regione $V > 7/8V_0$ si ha $dT < 0$ e $C > 0$. In questa regione il gas **non ha piú bisogno di assorbire calore** per espandersi, in quanto la trasformazione adiabatca che parte in $V = 7/8V_0$ sta sopra il segmento che indica la pressione in funzione del volume, come si vede in Figura 5. La termodinamica diventa instabile, in quanto non si riesce a mantenere l'equilibrio meccanico: la pressione del gas é maggiore di quella che serve per tenere in equilibrio sopra di sé la colonna di mercurio. Il gas si espande da solo in modo adiabatco senza bisogno di “spinte” e butta fuori tutto il mercurio dal tubo.
3. In funzione di quanto detto al punto 2, viene fornito calore solo fra $V = 1/2V_0$ e $V = 7/8V_0$. Si vede chiaramente che $p(V)$ é una funzione lineare, per cui il grafico sará un segmento, come si vede in Figura 4.

²E la parete?, sí, ci arriviamo.

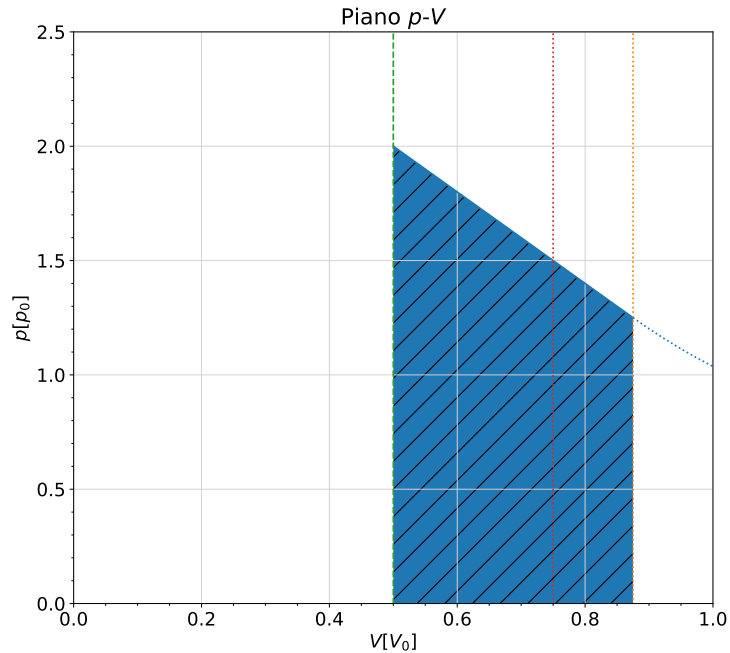


Figura 4: grafico del piano p - V . L'area evidenziata é il lavoro compiuto dal gas nel tratto che ci interessa.

4. Dato che dal momento in cui il volume supera $V = 7/8V_0$ la trasformazione procede come adiabatica, é sufficiente calcolare il calore fornito da $V = V_0/2$ a $7/8V_0$.

$$Q = \Delta U + L$$

Il lavoro si può calcolare come area del trapezio, per cui basta fare una moltiplicazione. Il risultato é $L = \frac{39}{64}p_0V_0$. ΔU invece é semplicemente uguale a $nC_V\Delta T$, tutte quantità che si possono calcolare facilmente a partire dalle formule che abbiamo già scritto. Il risultato per ΔU é $\Delta U = \frac{15}{64}p_0V_0$. Il risultato é $Q = \frac{27}{32}p_0V_0$

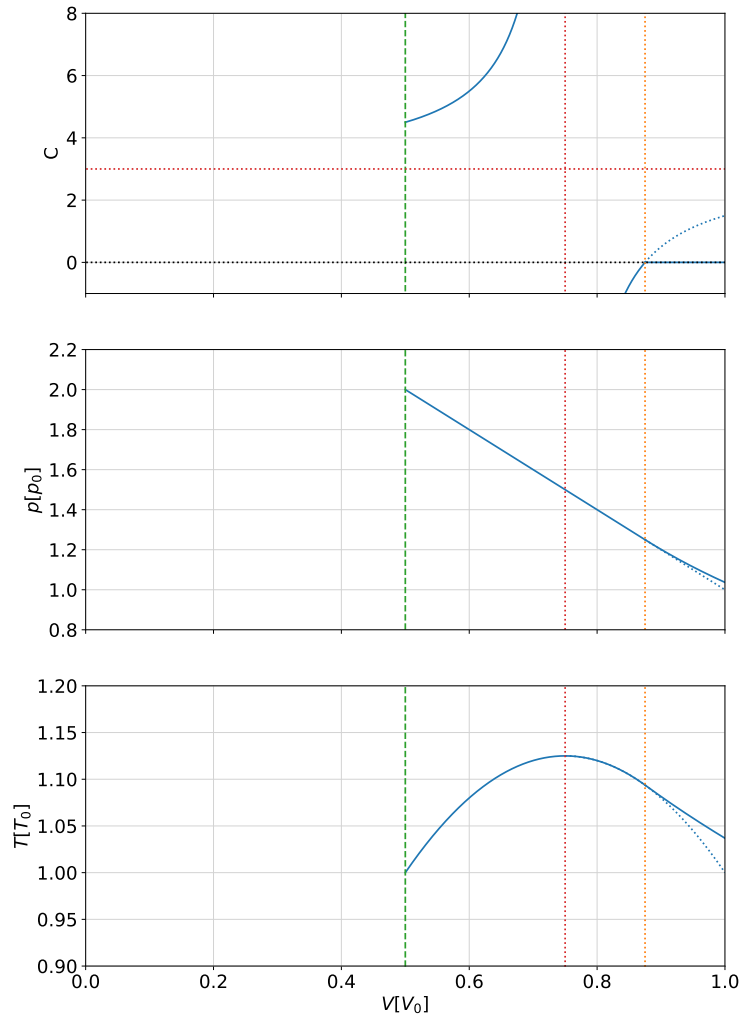


Figura 5: situazione complessiva delle trasformazioni. Le linee blu continue sono quelle seguite dal sistema, quelle blu tratteggiate sono quelle che avrebbe seguito se la parete avesse potuto fornire calore negativo.

10 Arrivo su un esopianeta ★★ [150pt]

10.1

Un giorno solare è lievemente più lungo di un giorno siderale, perché, nell'approssimazione di orbita circolare, il pianeta ha anche orbitato intorno alla propria stella di un angolo $\delta\theta = \omega_{\text{riv}} t_{\text{st}} = 2\pi t_{\text{st}}/T_0$. Detta ω_{rot} la velocità angolare di rotazione (e ω_{riv} quella di rivoluzione), si ha quindi:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{rot}} &= \frac{2\pi}{t_{\text{si}}} = \frac{2\pi + \delta\theta}{t_{\text{st}}} \\ \Rightarrow \frac{2\pi}{t_{\text{si}}} &= \frac{2\pi + 2\pi t_{\text{st}}/T_0}{t_{\text{st}}} \\ \Rightarrow T_0 &= \frac{t_{\text{st}} t_{\text{si}}}{t_{\text{st}} - t_{\text{si}}}\end{aligned}$$

10.2

Sia ω la velocità angolare di rivoluzione calcolata al periapside³: $\omega = 2\pi/T_0$, ω' quella calcolata all'apoapside: $\omega' = 2\pi/T'_0$, dove T'_0 è il periodo calcolato con l'approssimazione circolare, con i dati dell'apoapside: $T'_0 = t'_{\text{st}} t_{\text{si}} / (t'_{\text{st}} - t_{\text{si}})$.

Imponiamo la conservazione del momento angolare:

$$a_0 \omega^2 = a_1 \omega'^2 \Rightarrow a_1 = a_0 \frac{\omega^2}{\omega'^2}$$

Da cui si trova il semiasse maggiore:

$$\Rightarrow a = \frac{a_0 + a_1}{2} = a = \frac{a_0}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{t'_{\text{st}} t_{\text{si}}}{(t'_{\text{st}} - t_{\text{si}}) T_0}} \right)$$

Si ha poi l'eccentricità $e = 1 - a_0/a$.

10.3

Applicando la terza legge di Keplero per un'orbita quasi circolare si trova:

$$M = \frac{4\pi^2 a_0^3}{GT_0^2}$$

10.4

Nell'approssimazione newtoniana, assumo il fotone come una particella massiva con massa $m = E/c^2$, la perdita di energia gravitazionale è $|\Delta E| \approx \frac{GMm}{R_s}$. Per un fotone però $|\Delta E| = hc\Delta\lambda/\lambda^2 = E\Delta\lambda/\lambda$. Eguagliando le due espressioni si trova:

$$R_s = \frac{GM\lambda}{c^2\Delta\lambda}$$

³Qua c'è una sottigliezza che vale la pena di notare: quanto fatto nel punto 1 è il calcolo di un'orbita con ω costante, motivo per cui possiamo veramente scrivere $\omega = 2\pi/T_0$

10.5

Per la legge dello spostamento di Wien: $T = b/\lambda_{\text{MAX}}$ con b costante di Wien.

10.6

Imponiamo il bilancio energetico $P_{\text{ass}} = P_{\text{ced}}$. Sia T' la temperatura del pianeta, R_p il suo raggio. Sviluppando membro a membro il bilancio energetico, ricordando la legge di Stefan-Boltzmann:

$$\begin{aligned}\sigma T'^4 4\pi R_s^2 \frac{1}{4\pi a^2} \pi R_p^2 &= \sigma T'^4 4\pi R_p^2 \\ \Rightarrow T'^4 &= \frac{T^4 R_s^2}{4a_0^2}\end{aligned}$$

10.7

Se la temperatura del pianeta è costante su scale temporali dell'ordine del periodo orbitale, allora lungo un periodo l'energia ceduta è uguale a quella assorbita. Sia ora τ il periodo orbitale dell'orbita ellittica. Chiaramente per l'energia ceduta vale:

$$E_{\text{ced}} = \tau P_{\text{ced}} = \tau \sigma T'^4 4\pi R_p^2$$

Per l'energia assorbita, calcoliamo l'energia assorbita dal pianeta lungo un tratto infinitesimo di orbita, che spazza un angolo $d\theta$ in un tempo dt :

$$E_{\text{ass}} = \int_{\text{orbita}} dt P_{\text{ass}} = \int_{\text{orbita}} dt \sigma T^4 4\pi R_s^2 \frac{1}{4\pi r(\theta)^2} \pi R_p^2 \quad (15)$$

Dove $r(\theta)$ è la distanza tra pianeta e stella quando il pianeta ha spazzato un angolo θ della sua orbita. La conservazione del momento angolare ci dice però che:

$$\frac{L}{m} = r(\theta)v(\theta) = r^2(\theta)\omega(\theta) = r^2(\theta)\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{r^2(\theta)m}{L} d\theta$$

Sostituendo e integrando nell'espressione 15:

$$E_{\text{ass}} = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{r^2(\theta)m}{L} \sigma T^4 4\pi R_s^2 \frac{1}{4\pi r(\theta)^2} \pi R_p^2 \quad (16)$$

$$= 2\pi \frac{m\sigma T^4 R_s^2 \pi R_p^2}{L} \quad (17)$$

Sostituendo $L = 2\pi mab/\tau$, dalla condizione $E_{\text{ced}} = E_{\text{ass}}$ si trova:

$$T'^4 = \frac{T^4 R_s^2}{4ab}$$

11 Gas e setto mobile ★★ [100pt]

Punto 1. Dopo il rilascio del setto, ad agire su di esso vi sono due forze: la gravità e la forza dovuta alla divergenza di pressione che si crea fra le due parti del cilindro. Dato che le trasformazioni sono adiabatiche, pressione e volume in una sezione del tubo saranno strettamente legati, e quindi la differenza di pressione dipenderà direttamente dallo spostamento del setto. Il moto che si svilupperà sarà dunque armonico (risulterà dalle equazioni del moto la dipendenza lineare dallo spostamento del setto). Quando il setto scenderà fino a raggiungere la posizione in cui le forze si annullano vicendevolmente (posizione di equilibrio), il setto avrà acquisito una velocità non nulla verso il basso, che lo costringe a proseguire oltre la posizione di equilibrio verso la parte inferiore del tubo. In questa parte la forza netta è diretta verso l'alto: il setto dunque viene decelerato fino a fermarsi e riprendere il moto in direzione inversa. Il moto, con analogia a quanto sopra, prosegue verso l'alto fino a tornare al punto di partenza del moto con velocità nulla. A questo punto il moto si ripete uguale, da cui la periodicità del moto. Si noti che l'unico ruolo della gravità è quello di spostare la posizione di equilibrio intorno a cui avviene l'oscillazione, mentre non altera né l'ampiezza né la frequenza della stessa. Il significato fisico di questo fatto è imputabile al fatto che, a differenza di quanto accade per la forza dovuta alla pressione dell'aria, la gravità è costante sia in modulo che in verso: la gravità dunque non può alterare la frequenza di oscillazione del moto armonico che si avrebbe in sua assenza.

Punto 2. Scegliendo come sistema di coordinate l'asse x con origine nella posizione iniziale del setto e verso positivo nello stesso verso della gravità. Chiamata p_b la pressione sul setto dovuto al gas che si trova in basso e p_a la pressione sul setto dovuto al gas che si trova in alto, e sia S l'area del setto, otteniamo che la risultante R delle forze agenti sul setto è pari a

$$R = p_a S - p_b S + mg \quad (18)$$

Consideriamo ora uno spostamento $x > 0$ del setto. Il volume del gas in alto V_a aumenterà della quantità Sx mentre contemporaneamente V_b diminuisce della stessa quantità. Dato che il volume iniziale di ambedue le sezioni è $V_0 = lS$, allora i volumi dopo lo spostamento saranno:

$$\begin{aligned} V_a &= S(l + x) \\ V_b &= S(l - x) \end{aligned}$$

Le pareti sono perfettamente isolanti, quindi le reazioni che avvengono sono completamente adiabatiche: questo ci consente di scrivere le pressioni secondo la relazione per i gas perfetti $pV^\gamma = \text{cost.}$

$$p_a V_a^\gamma = p_0 V_0^\gamma \Rightarrow p_a = P_0 \left(\frac{V_0}{V_a} \right)^\gamma = p_0 \left(\frac{Sl}{S(l+x)} \right)^\gamma = p_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right)^{-\gamma} \quad (19)$$

Ricordando la relazione valida per $q \ll 1$ data nel testo: $(1 \pm q)^\alpha \approx 1 \pm \alpha q$, si ha:

$$p_a \approx p_0 \left(1 - \frac{\gamma}{l} x\right) \quad (20)$$

In modo analogo per p_b si ha

$$p_b \approx p_0 \left(1 + \frac{\gamma}{l} x\right) \quad (21)$$

Sostituendo la (20) e la (21) nella (18) si ottiene

$$R \approx mg + Sp_0 \left(1 - \frac{\gamma}{l} x\right) - Sp_0 \left(1 + \frac{\gamma}{l} x\right) = mg - \frac{2Sp_0\gamma}{l} x \quad (22)$$

da cui segue, ponendo $R = m\ddot{x}$, l'equazione del moto:

$$\ddot{x} = g - \frac{2Sp_0\gamma}{ml} x \quad (23)$$

Punto 3. Dall'equazione (22) e dalla condizione $R = 0$ si ricava la posizione di equilibrio:

$$x_{\text{eq}} = \frac{mgl}{2Sp_0\gamma} \quad (24)$$

Guardando l'equazione (23), e notando che il movimento è unidimensionale, in analogia col moto armonico di una molla $\ddot{x} = g - \omega^2 x$, si ricava che il moto che compie il setto è armonico intorno alla posizione di equilibrio. Per ricavare l'ampiezza del moto, si impongono le condizioni iniziali del moto $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = 0$ e si ricava l'equazione del moto:

$$x(t) = \frac{mgl}{2Sp_0\gamma} \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{2Sp_0\gamma}{ml}} t \right) \right] \quad (25)$$

Punto 4. L'ambiente esterno è molto più grande del tubo, quindi può essere considerato come un serbatoio ideale a temperatura T_0 . Chiamando T' la temperatura del gas in alto e T la temperatura per il gas in basso, chiamando W' e W la potenza assorbita dal gas rispettivamente in alto e in basso, per quanto affermato nel testo si può scrivere che

$$W = k(T_0 - T) \quad (26)$$

$$W' = k(T_0 - T') \quad (27)$$

La potenza è positiva se il gas assorbe calore, negativa altrimenti, pertanto $k > 0$. Inoltre, per l'ipotesi del testo secondo cui lo spostamento del setto $\delta x \ll l$, dunque k può essere considerata costante e indipendente dalla superficie della porzione di cilindro dei due setti. Per le trasformazioni adiabatiche la temperatura e il volume sono legati dalla relazione $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$. Pertanto, in analogia a quanto fatto nel punto (11), e ricordando che $V_0 = Sl$ è il volume iniziale e T_0

oltre ad essere la temperatura ambientale è anche la temperatura iniziale dei due gas, possiamo scrivere per il gas in alto:

$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T' V_a^{\gamma-1} \quad (28)$$

$$T' = T_0 \left(\frac{Sl}{S(l+x)} \right)^{\gamma-1} = T_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^{\gamma-1} \approx T_0 \left(1 + \frac{(\gamma-1)}{l} x \right) \quad (29)$$

Ed analogamente per il gas in basso si può scrivere:

$$T = T_0 \left(1 - \frac{(\gamma-1)}{l} x \right) \quad (30)$$

Combinando i risultati ottenuti in (28) e (30) nelle (26) otteniamo:

$$W(x) = +kT_0 \frac{\gamma-1}{l} x \quad (31)$$

$$W'(x) = -kT_0 \frac{\gamma-1}{l} x \quad (32)$$

Punto 5. Durante il ciclo, il calore assorbito dal gas in alto è uguale al calore ceduto dalla parte in basso ($W' = -W$). Pertanto, il calore complessivamente scambiato con l'ambiente è nullo, e il risultato finale è come se il gas in alto avesse assorbito calore direttamente dal gas in basso attraverso il setto (anche se non è il fenomeno fisico effettivamente avvenuto). Considerando che in numero di moli di gas presente nei due setti è lo stesso, e considerando che la temperatura iniziale dei due gas è la temperatura dell'ambiente esterno, si ha la relazione cercata fra le tre temperature, ovvero

$$T_0 - T' = -(T_0 - T) \Rightarrow T + T' = 2T_0 \quad (33)$$

Per calcolare come varia in questo caso l'equazione del moto, si considera come al punto (11) il ragionamento fatto per trovare la pressione al variare dello spostamento:

$$p_a V_a^\gamma = V_0^\gamma p \quad p_b V_b^\gamma = V_0^\gamma p' \quad (34)$$

dove p' e p sono le pressioni iniziali dopo un ciclo rispettivamente della parte inferiore e superiore. Inoltre, ricordando la legge dei gas perfetti e ricordando che all'inizio il volume dei due gas è uguale a V_0 , allora si ricava

$$\frac{p}{T} = \frac{p'}{T'} = \frac{p_0}{T_0}$$

allora, come prima, possiamo sviluppare ed ottenere

$$p_a = \frac{p_0 T'}{T_0} \left(1 - \frac{\gamma}{l} x \right) \quad (35)$$

$$p_b = \frac{p_0 T}{T_0} \left(1 + \frac{\gamma}{l} x \right) \quad (36)$$

Da ciò, sostituendo (35) in (18) la risultante R_2 delle forze si può scrivere come:

$$R_2 = mg + \frac{p_0 S}{T_0} (T' - T) - 2p_0 S \frac{\gamma}{l} x \quad (37)$$

Da questa si può ricavare la posizione di equilibrio ponendo $R_2 = 0$, da cui

$$x_{\text{eq}} = \frac{l}{2\gamma} \left(\frac{gm}{p_0 S} + \frac{T' - T}{T_0} \right) \quad (38)$$

Imponendo $R_2 = m\ddot{x}$ si ricava l'equazione del moto

$$\ddot{x} = g + \frac{p_0 S}{mT_0} (T' - T) - 2 \frac{p_0 S \gamma}{ml} x \quad (39)$$

Come al punto (11) riconosciamo in (39) l'equazione di un moto armonico traslato, e imponendo le condizioni iniziali come sopra otteniamo

$$x(t) = \left(\frac{mgl}{2p_0 S \gamma} + \frac{(T' - T)l}{2T_0 \gamma} \right) \left[1 - \cos \left(\sqrt{\frac{2Sp_0 \gamma}{ml}} t \right) \right] \quad (40)$$

In quest'equazione del moto, possiamo notare che la frequenza di oscillazione – e dunque il periodo – non è cambiata, mentre l'ampiezza del moto è aumentata dato che $T' > T$ (confronta le due equazioni 29 e 30). Inoltre, per lo stesso fatto x_{eq} si è spostato nel verso positivo delle x , ovvero rispetto alla gravità si è abbassato: questo spostamento della posizione di equilibrio rende inutili le formule appena ricavate dopo pochi cicli, perché rende incorrette le approssimazioni fatte.

12 Una lente tagliata a metà ★★ [100pt]

1. Le due lenti tagliate a metà sono equivalenti a due lenti con gli assi ottici paralleli separati di una distanza δ . Il fatto che la lente sia tagliata a metà non modifica la posizione dell'immagine, ma solo l'intensità dell'immagine che si forma. Si formano quindi due immagini. Per trovare la distanza q delle immagini dalla lente usiamo la legge:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$q = \frac{pf}{p-f} = 20 \text{ cm}$$

L'immagine si forma a una distanza $x = \frac{q}{2} \delta = 0.5 \text{ mm}$ dall'asse ottico. La distanza Δ tra le due sorgenti risulta quindi essere $\Delta = \delta + 2x = 2 \text{ mm}$.

2. Osservando la Figura 6 si vede che le due sorgenti luminose formano due coni di luce che si intersecano per una lunghezza pari a l lungo lo

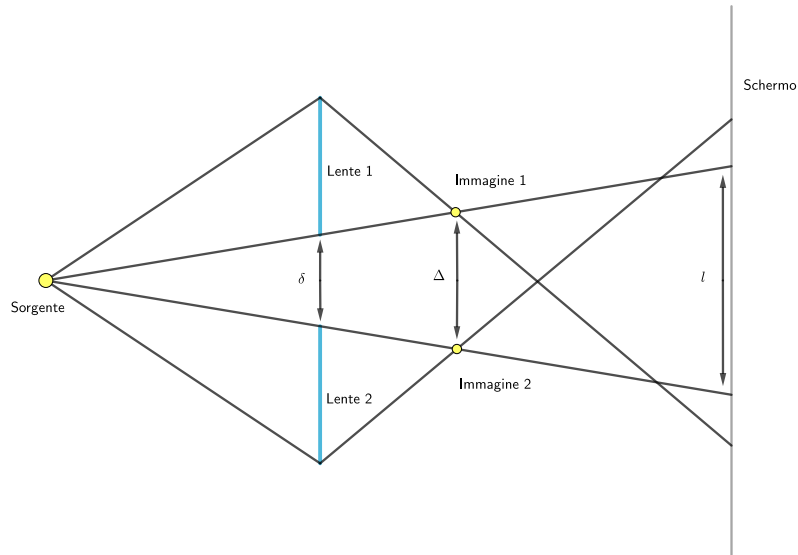


Figura 6: I due coni di luce si intersecano per una lunghezza pari a l

schermo. Le figure di interferenza si formeranno quindi solo in questa zona di intersezione. Per trovare l sfruttiamo la similitudine tra i triangoli:

$$\frac{l}{\delta} = \frac{H+p}{p}$$

$$l = \frac{H+p}{p} \delta = 3.5 \text{ mm}$$

3. A questo punto il sistema è equivalente a due sorgenti puntiformi e coerenti a una distanza $d = H - q$ dallo schermo. Nell'approssimazione in cui $\Delta \ll H - q$ sappiamo che si ha interferenza costruttiva quando:

$$\Delta \sin(\theta) = m\lambda$$

dove m è un numero intero, θ è l'angolo misurato tra la congiungente il punto medio delle due sorgenti e il punto sullo schermo dove si verifica interferenza costruttiva e la retta perpendicolare allo schermo passante per il punto medio delle due sorgenti. Sia y la posizione del punto sullo schermo. Nell'approssimazione in cui $y \ll d = H - q$ possiamo usare il fatto che $\sin(\theta) \approx \theta \approx \frac{y}{d}$. Otteniamo così che la distanza tra due frange

consecutive è data da $a = \frac{d}{\Delta} \lambda$. Si ottengono così N frange:

$$N = \frac{l}{a}$$
$$N = \frac{\delta^2}{\lambda} \frac{H+p}{H(p-f) - pf} \approx 47$$

Soluzione alternativa. Se uno non si ricordasse esattamente perché e quali leggi può usare, è sempre possibile calcolarsi la differenza di cammino ottico massima Δc . Per il teorema di Pitagora:

$$\begin{aligned} \Delta c &= \sqrt{d^2 + \left(\frac{l+\Delta}{2}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(\frac{l-\Delta}{2}\right)^2} \\ &= d \left(\sqrt{1 + \left(\frac{l+\Delta}{2d}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{l-\Delta}{2d}\right)^2} \right) \\ &\approx d \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{l+\Delta}{2d}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l-\Delta}{2d}\right)^2 \right) \\ &= d \left(\frac{l\Delta}{2d^2} \right) \end{aligned}$$

Da cui $m_{\max} = \frac{\Delta c}{\lambda}$ e considerando anche le frange per m negativi si ottiene $N = 2m_{\max} = \frac{l\Delta}{d\lambda}$.