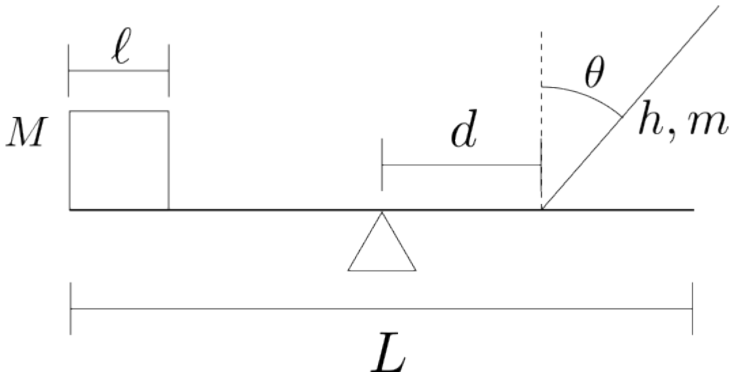
Soluzioni ai problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

26 novembre 2025

PROB. 1 — MICHAEL JACKSON - 60 PT. —



1. Dal momento che il sistema si trova in equilibrio meccanico, il momento torcente totale rispetto al perno dev'essere nullo. La distanza orizzontale del centro di massa del cubo dal perno è
$$x_1 = \frac{L-\ell}{2}.$$
D'altro canto, se Michael Jackson è inclinato di un angolo θ rispetto alla verticale (positivo verso destra), il suo centro di massa dista orizzontalmente dal perno di
$$x_2 = d + \frac{1}{2}h\sin\theta.$$
La condizione di equilibrio diventa
$$M\frac{L-\ell}{2} = m\left(d+\frac{1}{2}h\sin\theta\right) \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{M(L-\ell)-2md}{mh}\right) \approx 50^\circ.$$

2. Affinché il Re riesca a non cadere senza nessun sostegno esterno, la proiezione del suo centro di massa deve giacere all'interno della pianta dei suoi piedi. Dunque questi dovrebbero essere lunghi almeno
$$D = \frac{1}{2}h\sin\theta \approx 67\,\mathrm{cm}.$$
Chiaramente questo è assurdo, quindi lo spettatore ha avuto l'intuizione giusta.

PROB. 2 — BAGNI TERMICI CONSECUTIVI - 70 PT. —

1. Il sistema in considerazione non è altro che macchina di Carnot ideale che lavora tra due sorgenti a temperature fissate, quindi il suo rendimento è ben noto essere
$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T_1}.$$

2. Indichiamo come k-esimo bagno termico il bagno a temperatura T_k. Ricordiamo che il rendimento di una generica macchina termica è $\eta = \frac{L}{Q_{\text{ass}}}$, dove L è il lavoro prodotto e $Q_{\text{ass}} > 0$ è il calore complessivamente assorbito dalle sorgenti. Per ipotesi, il bagno termico

*segreteria.stagefisica@sns.it

2 cede in un ciclo un calore Q_2, mentre la macchina termica che lavora tra i bagni 1 e 2 cede un calore Q_1 al bagno 1. Visto che la macchina è ideale, vale

$$\frac{Q_2}{T_2} = \frac{Q_1}{T_1}.$$

D'altro canto, la macchina che lavora tra i bagni 1 e 0 assorbe Q_1 dal bagno 1, cedendo Q_0 al bagno 0, con

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_2}{T_2}.$$

Dunque il lavoro totale è

$$L = (Q_2 - Q_1) + (Q_1 - Q_0) = Q_2 - Q_0 = Q_2\left(1 - \frac{T_0}{T_2}\right).$$

Visto che il bagno 1 non scambia complessivamente calore, $Q_{\text{ass}} = Q_2$, da cui

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T_2}.$$

3. L'idea è la medesima del punto precedente. La macchina che lavora tra il bagno k e il bagno $k-1$ assorbirà Q_k dal bagno k, cedendo Q_{k-1} al bagno $k-1$, con

$$\frac{Q_k}{T_k} = \frac{Q_{k-1}}{T_{k-1}}.$$

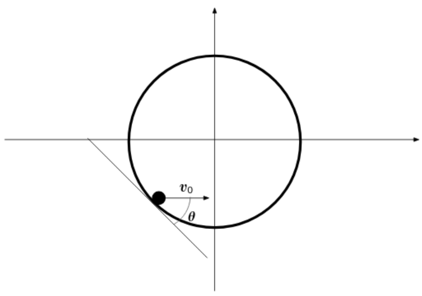
Il lavoro totale sarà

$$L = (Q_n - Q_{n-1}) + (Q_{n-1} - Q_{n-2}) + \ldots + (Q_1 - Q_0) = Q_n - Q_0 = Q_n\left(1 - \frac{T_0}{T_n}\right).$$

Visto che l'unico bagno a cedere complessivamente calore è l'n-esimo, concludiamo che

$$\eta = 1 - \frac{T_0}{T_n}.$$

PROB. 3 — Collisioni geometriche - 85 pt.



La velocità del cdm è costante perché la quantità di moto si conserva

$$\vec{v}_{cdm} = \frac{m\vec{v}_0}{m+M} = \frac{m(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y})}{m+M}$$

Vediamo cosa succede in un singolo urto. Supponiamo che le velocità iniziali siano $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ e poniamo un sistema di assi cartesiano con l'asse x lungo la tangente nel al punto di contatto e l'asse y verso il centro del cerchio, come mostrato in figura.

L'impulso tra i 2 corpi è tutto lungo $\hat{y}$ quindi $v_{1x} = v_{1x}$, $v_{2x} = v'_{2x}$ e questa forza non genera momento torcente sul disco che quindi non inizierà mai a ruotare. Per conservazione della quantità di moto e dell'energia otteniamo

$$mv_{1y} + Mv_{2y} = mv'_{1y} + Mv'_{2y}$$

$$mv_1^2 + Mv_2^2 = mv_1'^2 + Mv_2'^2$$

$$mv_{1y}^2 + Mv_{2y}^2 = mv_{1y}'^2 + Mv_{2y}'^2$$

L'ultima si ottiene sostituendo v^2 con $v_x^2 + v_y^2$ e l'energia lungo x si semplifica perché le velocità rimangono uguali. Se troviamo v_{1y} in funzione di v_{2y} dalla prima e lo sostituiamo nella terza otteniamo un'equazione di secondo grado

$$mv_{1y}^2 + Mv_{2y}^2 = \frac{(mv_{1y} + Mv_{2y} - Mv'_{2y})^2}{m} + Mv_{2y}'^2$$

Sappiamo già una soluzione dell'equazione che è $v'_{2y} = v_{2y}$ e possiamo trovare la seconda raccogliendo un fattore $(v'_{2y} - v_{2y})$ e semplificandolo oppure usando le formule di Viete.

$$\frac{M(m+M)}{m}v_{2y}'^2 - \frac{2M(mv_{1y} + Mv_{2y})}{m}v'_{2y} + (Roba) = 0$$

$$v'_{2y} = -\frac{b}{a} - v_{2y} = \frac{2(mv_{1y} + Mv_{2y})}{m+M} - v_{2y} = 2v_{cdmy} - v_{2y}$$

Similmente $v'_{1y} = 2v_{cdmy} - v_{1y}$.

Notiamo che $(v'_{1y} - v'_{2y}) = -(v_{1y} - v_{2y})$ quindi nel sistema di riferimento dell'anello la pallina fa un moto con urti elastici al suo interno.

Studiamo quindi la posizione relativa della pallina $\vec{x}_r = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

Per quanto detto in precendenza la velocità dell'oggetto rimane costante in modulo ed è quindi sempre v_0. Facendo riferimento alla figura, la lunghezza di ogni segmento è $l = 2R\sin(\theta)$ e avviene un urto ogni $T = \frac{2\sin(\theta)R}{v_0}$.

Orientiamo gli assi x, y in questo modo a partire dalla situazione iniziale descritta in figura.

Dopo un certo tempo t ci saranno stati $\lfloor \frac{t}{T} \rfloor$ urti quindi una rotazione di $\lfloor \frac{t}{T} \rfloor 2\theta$ seguiti da un tratto rettilineo a velocità $\vec{v}_f$.

$$\vec{x}_r = \sin\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor 2\theta\right)\hat{y} + \cos\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor 2\theta\right)\hat{x} + \left(t - T\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor\right)\vec{v}_f$$

Dove $\vec{v}_f$ è data da

$$\vec{v}_f = -\sin\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor 2\theta + \theta\right)\hat{x} + \cos\left(\left\lfloor \frac{t}{T} \right\rfloor 2\theta + \theta\right)\hat{y}$$

Perché ad ogni urto ruota di un angolo 2θ.

Possiamo esprimere infine $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ in funzione di $\vec{x}_r$ e $\vec{x}_{cdm} = \vec{v}_{cdm}t + \frac{mR}{m+M}\hat{x}$

$$\vec{x}_1 = \vec{x}_{cdm} + \frac{M\vec{x}_r}{m+M}$$

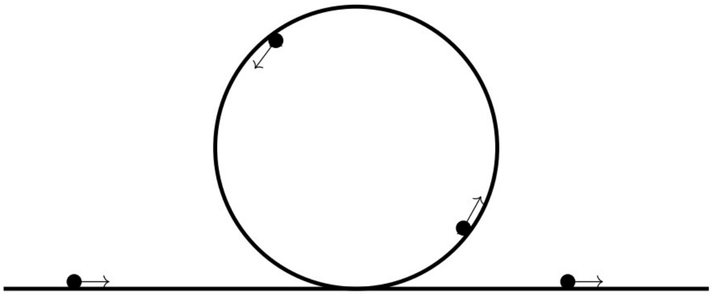
$$\vec{x}_2 = \vec{x}_{cdm} - \frac{m\vec{x}_r}{m+M}$$

Quando il punto viene sostituito con il cerchio di raggio r la situazione è analoga a un punto materiale dentro un anello di raggio $R - r$. Possiamo notare che anche in questo caso la forza impulsiva è sulla congiungente dei centri quindi non genera momento torcente e nessuno dei 2 oggetti inizia a ruotare.

Le equazioni per le velocità dopo gli urti quindi rimangono invariate ma adesso l'urto avviene se la distanza relativa tra i centri è $R - r$ invece che R. Basta quindi rimpiazzare R con $R - r$ nella soluzione precedente.

La $\vec{x}_r$ ritorna al valore iniziale dopo un certo tempo se e solo se ad un certo $t = nT$ abbiamo $\frac{t}{T}2\theta = 2k\pi$ che succede se e solo se $\theta = q\pi$ per qualche $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$. Il numero di urti è il denominatore della frazione q.

PROB. 4 — Loop su guida mobile - 90 pt.



1. Possiamo risolvere direttamente il secondo punto e calcolare il limite $m \ll M$ successivamente.

   Siano v e V le velocità rispettivamente del corpo e della guida nell'istante in cui il corpo si trova in cima alla guida, entrambe positive se concordi con v_0 e negative altrimenti. Osserviamo che tutte le forze a cui è soggetta la guida sono dirette lungo l'asse y, dunque nell'istante considerato la sua accelerazione è nulla. Consideriamo cosa succede nello stesso istante in un sistema di riferimento inerziale in cui la guida ha velocità nulla, e il corpo ha dunque una velocità $v' = v - V$. Il corpo si sta istantaneamente muovendo di moto circolare, dunque deve essere soggetto ad una forza radiale pari a $m\frac{v'^2}{R}$. Questa dev'essere uguale a $N + mg$, dove N è la forza normale della guida sul corpo in direzione radiale entrante. Il corpo non si stacca se e solo se $N \geq 0$, dunque troviamo un valore minimo per la velocità: $v'^2 \geq Rg$. Notiamo infine che v' è diretta verso sinistra, in quanto la pallina percorre la guida in senso antiorario. Otteniamo dunque il valore critico:

   $$v - V = v' - \sqrt{Rg}.$$

   Le altre due equazioni che useremo per risolvere il sistema a tre incognite sono la legge di conservazione della quantità di moto lungo l'asse orizzontale x e la legge della conservazione dell'energia, valide perché il sistema interagisce con l'esterno solo per la forza normale del piano e la forza di gravità (entrambe di direzione verticale e conservative) e non presenta forze interne dissipative. Otteniamo:

   $$mv_0 = mv + MV,$$

   $$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mRg + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2.$$

   Calcolando V dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda otteniamo:

$$mv_0 = (m + M)v + M\sqrt{Rg}.$$

Calcolando da questo v, sostituendo sia v che V nella terza equazione e moltiplicando per due, otteniamo:

$$mv_0^2 = 4mRg + \frac{m}{(m+M)^2}(mv_0 - M\sqrt{Rg})^2 + M(\sqrt{Rg} + \frac{1}{m+M}(mv_0 - M\sqrt{Rg}))^2$$

che, raggruppando termini simili in v_0 e Rg, diventa

$$(m^3+Mm^2-m(m+M)^2)v_0^2+(2Mm^2-2Mm^2)v_0\sqrt{Rg}+(4m(m+M)^2+M^2m+Mm^2)Rg = 0.$$

Infine arriviamo a

$$Mv_0^2 = Rg(4m + 5M),$$

$$v_0 = \sqrt{Rg}\sqrt{\frac{4m+5M}{M}}.$$

Da cui l'approssimazione per $m \ll M$: $v_0 = \sqrt{5Rg}$.

2. Mostriamo che non distaccarsi nel punto più alto è condizione sufficiente per compiere un giro completo. Sia v_0 il minimo valore della velocità iniziale per cui la pallina riesca a fare il giro, e sia θ il primo angolo per cui la forza normale si annulli, misurato come deviazione dal punto più basso della traiettoria. In altre parole, vogliamo mostrare che θ sia uguale a π.

   Nel punto in cui la pallina si trova in θ, come abbiamo detto la forza normale è nulla. Per lo stesso ragionamento del punto precedente, possiamo quindi stabilire che la guida non sente nessuna accelerazione, e dunque la pallina deve essere soggetta ad una forza centripeta pari alla componente radiale della gravità. In formula,

$$m\frac{v^2}{R} = -mg\cos(\theta)$$

   ,

   Scrivendo le equazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto sull'asse x, stavolta in funzione di $\vec{v}$ anziché $\vec{v}_1$

$$mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m|\vec{v} + \vec{v}_M|^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$m(v_1\cos\theta + v_M) + Mv_M = mv_0.$$

   In particolare, $\vec{v}$ e $\vec{v}_M$ formano un angolo θ l'uno con l'altro, dunque l'equazione della conservazione dell'energia si semplifica:

$$mgR(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 + mv_Mv\cos\theta + \frac{1}{2}mv_M^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = \frac{1}{2}mv_0^2.$$

Possiamo risolvere per v^2 in due modi, sostituendo v_M nell'energia e usando la forza centripeta:

$$v^2 = \frac{v_0^2(1 - \frac{m}{m+M}) - 2gR(1 - \cos\theta)}{1 - \frac{m}{m+M} cos^2\theta} = gR\cos\theta.$$

$$\frac{v_0^2}{gR}\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = \left(2 - 3\cos\theta + \frac{m}{m+M} cos^3\theta\right).$$

Ma la funzione $f(x) = 2 - 3x + cx^3$ è decrescente sull'intervallo $0 < x < 1$ se $0 < c < 1$. Dunque il minimo valore di v_0 che faccia avere soluzione all'equazione è quello che rende minimo $\cos(\theta)$, ovvero quello per cui $\theta = \pi$.

PROB. 5 — IL PIANETA DA SALVARE - 95 PT. ·

Nel moto in un campo gravitazionale il momento angolare rispetto al centro di attrazione è una costante del moto, dato che la forza è centrale. Inoltre il momento angolare è perpendicolare al piano in cui si svolge il moto, dunque l'angolo compreso tra due piani su cui sono confinati moti di momento angolare $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$ è pari all'angolo compreso tra $\vec{L}_1$ e $\vec{L}_2$. Si applichi ora questo ragionamento in tutti i punti del problema.

1) L'idea è quella di calcolare il momento angolare del pianeta prima e dopo essere stato colpito dal sasso, e poi trovare l'angolo tra i due.
Il momento angolare del pianeta ha modulo pari a

$$|\vec{L}_0| = MvR.$$

Durante l'urto tra il pianeta e il sasso, il momento angolare del sistema pianeta-sasso calcolato rispetto al centro di attrazione si conserva (non agiscono momenti esterni). Dunque il momento angolare del pianeta dopo l'urto con il sasso è pari alla somma tra il suo momento angolare prima dell'urto e il momento angolare del sasso prima dell'urto.
Per trovare il momento angolare del sasso si noti che esso percorre un'orbita parabolica, ovvero con energia meccanica pari a zero (nella convenzione in cui si pone l'energia potenziale gravitazionale nulla all'infinito). Si denoti con v_m il modulo della velocità del sasso al suo perielio.

$$-G\frac{mM_S}{r} + \frac{1}{2}mv_m^2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_m = \sqrt{\frac{2GM_S}{r}}.$$

Il momento angolare del sasso ha dunque modulo pari a

$$|\vec{L}_s| = m\sqrt{2GM_S r}.$$

Si noti che $\vec{L}_0 \perp \vec{L}_s$, dunque l'angolo formato tra $(\vec{L}_0 + \vec{L}_s)$ e $\vec{L}_0$ è pari a

$$\alpha = \arctan\frac{L_s}{L_0} = \arctan\left(\frac{m}{vR}\sqrt{\frac{2Gr}{M_S}}\right).$$

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{m}{vR}\sqrt{\frac{2Gr}{M}}\right)}$$

2) A differenza del caso precedente, avvengono n urti. Dato che i sassi compiono il loro moto tutti sullo stesso piano, il momento angolare del pianeta dopo n urti è pari a

$$\vec{L}_0 + n\vec{L},$$

dunque l'angolo compreso tra $\vec{L}_0 + n\vec{L}$ e $\vec{L}_0$ (dove $\vec{L} \perp \vec{L}_0$) è pari a

$$\arctan \frac{nL}{L_0} = \arctan \frac{nL}{MvR}.$$

Dato che bisogna inclinare l'orbita di un angolo $\geq \frac{\pi}{3}$, per trovare n_{min} si impone

$$\frac{nL}{MvR} \geq \sqrt{3},$$

da cui

$$\boxed{n_{\text{min}} = \left\lceil \frac{MvR\sqrt{3}}{L} \right\rceil}$$

3) In questo caso il modulo del momento angolare del pianeta dopo il primo urto è pari a

$$\sqrt{L_0^2 + L'^2},$$

la sua variazione è pari dunque a

$$\delta L = \sqrt{L_0^2 + L'^2} - L_0 = L_0 \left(\sqrt{1 + \frac{L'^2}{L_0^2}} - 1 \right) \approx \frac{L_0}{2} \left(\frac{L'}{L_0} \right)^2.$$

La variazione dell'angolo dell'orbita dopo il primo urto è pari a

$$\delta\theta = \arctan \frac{L'}{L_0} \approx \frac{L'}{L_0}.$$

Dunque si ha

$$\frac{\delta L}{\delta\theta} = \frac{L'}{2} \ll L_0.$$

Di conseguenza con un sufficiente numero di urti di questo tipo si può portare a una variazione finita nell'angolo del piano dell'orbita lasciando pressoché invariato il modulo del momento angolare. Dunque, in quest'approssimazione, ripetendo i calcoli di sopra si trova che l'angolo di cui ruota il momento angolare del pianeta (o meglio, del sistema pianeta + sassi che l'hanno urtato) tra il k-esimo urto e il successivo è ancora pari a $\delta\theta$.
Per calcolare il numero di urti necessari si noti che, per quanto detto sopra, il vettore momento angolare del pianeta dopo $k+1$ urti ha modulo $|\vec{L}_k| = L_0$ ed è ruotato, rispetto a $\vec{L}_0$, di un angolo $k\delta\theta$. Per trovare n'_{min} si impone

$$nL' \geq L_0 \frac{\pi}{3},$$

da cui

$$\boxed{n'_{\text{min}} = \left\lceil \frac{\pi}{3} \frac{MvR}{L'} \right\rceil}$$

Nel caso in cui $L = L'$, è necessario un numero di sassi minore rispetto al punto 2.

PROB. 6 — POLVERE INTERSTELLARE - 90 PT.

Dato che i fotoni colpiscono il granello di polvere perpendicolarmente alla superficie e assumendo che le dimensioni interne del cubo siano trascurabili, ci si può ricondurre al caso di urto unidimensionale. Sia $N = 0.01N_A$ il numero di fotoni. Essendo questi completamente riflessi si ha conservazione dell'energia e della quantità di moto. Siano $p_0 = \frac{Nh}{\lambda}$ quantità di moto iniziale dei fotoni, p quantità di moto del granello dopo l'urto e $p_1 = \frac{Nh}{\lambda'}$ modulo della quantità di moto dei fotoni dopo l'urto. Le equazioni sono:

$$\begin{cases} p_0 = p - p_1 \\ mc^2 + p_0 c = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + p_1 c \end{cases} \tag{6.1}$$

Dalla prima si ottiene $p_1 = p - p_0$ e si sostituisce nella seconda:

$$mc^2 + p_0 c = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} + (p - p_0)c$$

Si divide per c e si isola la radice:

$$mc + 2p_0 - p = \sqrt{m^2c^2 + p^2}$$

Elevando al quadrato e isolando p:

$$m^2c^2 + 4p_0^2 + p^2 + 4mcp_0 - 2mcp - 4pp_0 = m^2c^2 + p^2$$

$$4p_0^2 + 4mcp_0 = 2mcp + 4pp_0$$

$$p(mc + 2p_0) = 2p_0^2 + 2mcp_0$$

$$p = p_0 \frac{2p_0 + 2mc}{2p_0 + mc} = \frac{Nh}{\lambda}\left(\frac{2\frac{Nh}{\lambda} + 2mc}{2\frac{Nh}{\lambda} + mc}\right) = 0{,}478\,\mathrm{kg\,m\,s^{-1}} \tag{6.2}$$

Si richiama la definizione di quantità di moto relativistica:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Da cui si ottiene:

$$1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{m^2v^2}{p^2}$$

$$p^2 = \left(\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m^2\right)v^2$$

Essendo p positivo:

$$v = \frac{p}{\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2 + m^2}} = \frac{pc}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$$

Sostituendo:

$$v = \frac{p_0\frac{2p_0+2mc}{2p_0+mc}}{\sqrt{\left(p_0\frac{2p_0+2mc}{2p_0+mc}\right)^2 + m^2c^2}}c = 0.923c = 2{,}77 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{6.3}$$

Sostituendo p nell'equazione della conservazione della quantità di moto si ottiene:

$$p_1 = p_0\left(1 + \frac{mc}{2p_0 + mc}\right) - p_0 = \frac{p_0 mc}{2p_0 + mc}$$

$$\frac{1}{p_1} = \frac{2}{mc} + \frac{1}{p_0}$$

Sostituendo la lunghezza d'onda e moltiplicando per Nh:

$$\lambda' = \frac{2Nh}{mc} + \lambda = 4{,}99 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \approx 5 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \tag{6.4}$$

Infine sia λ_s la lunghezza d'onda misurata nel sistema di riferimento della sonda e $\gamma_s = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_s^2}{c^2}}}$ il fattore gamma calcolato rispetto alla velocità della sonda. Si ha:

$$\lambda_s = \frac{\lambda'}{\gamma_s} = \gamma_s^{-1}\left(\frac{2h}{mc} + \lambda\right) = 4{,}32 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \tag{6.5}$$

PROB. 7 — RESISTENZA IN CAMPO MAGNETICO - 110 PT.

1. L'equazione del moto di un singolo elettrone nel materiale è

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} = -e\vec{E} - \alpha\vec{v}.$$

   Per $t \to +\infty$, la soluzione $\vec{v}(t)$ risulta avvicinarsi in maniera esponenziale a un valore di equilibrio tale che sia $\vec{F} = \vec{0}$. Dunque, dopo molto tempo, la velocità degli elettroni raggiungerà una velocità limite per cui si abbia

$$\vec{0} = \vec{F} = -e\vec{E} - \alpha\vec{v}.$$

   Inoltre, per definizione di densità volumica di corrente, si ha

$$\vec{J} = -ne\vec{v},$$

   dunque:

$$-e\vec{E} - \left(-\frac{\alpha}{ne}\right)\vec{J} = 0 \implies \vec{J} = \frac{ne^2}{\alpha}\vec{E}.$$

   Infine, ricordando che la resistività ρ è definita tramite l'equazione $\vec{E} = \rho\vec{J}$, si trova

$$\rho = \frac{\alpha}{ne^2}.$$

2. In questo caso, gli elettroni subiscono l'effetto della forza di Lorentz, oltre all'effetto del campo elettrico. Si ha perciò

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \alpha\vec{v},$$

   ossia, in componenti,

$$F_x = -eE - e(Bv_y) - \alpha v_x, \qquad F_y = -e(-Bv_x) - \alpha v_y.$$

   Poiché, dopo molto tempo (ossia in condizioni stazionarie), si ha $\vec{F} = \vec{0}$, per trovare i valori di v_x e v_y all'equilibrio bisogna risolvere un sistema di due equazioni lineari in due incognite, ottenendo

$$v_x = \frac{-eE\alpha}{\alpha^2 + e^2B^2}, \qquad v_y = \frac{eB}{\alpha}v_x.$$

Dunque si ottiene

$$J_x = -nev_x = \frac{e^2 n\alpha E}{\alpha^2 + e^2 B^2}, \qquad J_y = -nev_y = \frac{eB}{\alpha} J_x,$$

da cui è immediato calcolare l'angolo cercato:

$$\theta = \arctan\left(\frac{J_y}{J_x}\right) = \arctan\left(\frac{eB}{\alpha}\right).$$

3. La presenza del generatore di d.d.p. induce, molto tempo dopo la sua accensione, un campo elettrico costante e uniforme $\vec{E}_0$ dato da

$$\vec{E}_0 = \frac{\Delta V}{\ell}\hat{x}.$$

In condizioni stazionarie, la corrente $\vec{J}$ che scorre nel resistore è costante nel tempo e diretta lungo l'asse delle x:

$$\vec{J} = J\hat{x}.$$

A tale corrente corrisponde, per ciascun elettrone, una velocità

$$\vec{v} = -\frac{J}{ne}\hat{x},$$

dunque la Forza di Lorentz agente su ciascuno di essi vale

$$\vec{F}_L = -e\vec{v} \times \vec{B} = -\frac{JB}{n}\hat{y}.$$

Tale forza, in condizioni stazionarie, deve essere bilanciata da un ulteriore campo elettrico costante e uniforme presente nel resistore e diretto lungo l'asse delle y, con

$$\vec{E} = E\hat{y}, \qquad -eE - \frac{JB}{n} = 0 \implies E = -\frac{JB}{ne}$$

e tale campo elettrico è generato, come nell'Effetto Hall, da due densità di carica superficiali di ugual modulo e segno opposto presenti sulle superfici $y = 0$ e $y = b$. Detto σ tale modulo, si ha, per analogia con un condensatore a facce piane,

$$\sigma = \frac{JB\varepsilon_0}{ne}.$$

A questo punto, osserviamo che, lungo l'asse x, l'unico campo elettrico presente è $\vec{E}_0$, pertanto la resistività del materiale coincide con la ρ calcolata al punto 1 e si ha

$$J = \frac{E_0}{\rho} = \frac{\Delta V ne^2}{\ell\alpha},$$

da cui anche

$$\sigma = \frac{eB\Delta V\varepsilon_0}{\ell\alpha},$$

e, per finire, la resistenza totale vale

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{\Delta V}{Jab} = \frac{\ell\alpha}{abne^2}.$$

4. Si è visto al punto precedente che, all'equilibrio, sono presenti due densità superficiali di carica σ e $-\sigma$ sulle superfici $y = 0$ e $y = b$. Pertanto, è possibile approssimare il sistema a un condensatore a lastre piane di capacità

$$C = \frac{\varepsilon_0 a\ell}{b}$$

su cui è presente una carica

$$Q = \sigma a\ell = \frac{eaB\Delta V\varepsilon_0}{\alpha},$$

perciò l'energia cercata vale

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\varepsilon_0 e^2 B^2 \Delta V^2 ab}{2\ell\alpha^2}.$$

PROB. 8 — Contenitore cilindrico a mollo - 115 pt.

Analizziamo il comportamento di un cilindro d'acqua di spessore infinitesimo in caduta libera. Chiamate m la sua massa, g l'accelerazione di gravità, h la quota del cilindro rispetto al livello dell'acqua e v_h la sua velocità, la conservazione dell'energia impone

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgH' = \frac{1}{2}mv_h^2 + mgh.$$

Otteniamo quindi

$$v_h = \sqrt{v_0^2 + 2g(H' - h)}.$$

All'informazione sulla velocità dell'acqua data dalla conservazione dell'energia, dobbiamo aggiungere quella sul raggio data dall'equazione di continuità:

$$\pi r^2 v_0 = \pi r_h^2 v_h,$$

dove abbiamo eguagliato la portata volumetrica all'uscita dal rubinetto a quella alla quota h (r_h è il raggio del cilindro d'acqua all'altezza h). Da questa relazione otteniamo

$$r_h = r\sqrt{\frac{v_0}{v_h}},$$

che può essere riscritta in funzione di h:

$$r_h = r\sqrt[4]{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2g(H' - h)}}.$$

Queste equazioni danno due informazioni: al diminuire della quota h la velocità dell'acqua aumenta e il cilindro d'acqua tende a restringersi. A questo punto è necessario controllare se il flusso passa interamente o no dal foro sul contenitore. Sostituendo i dati e imponendo $h = 0.5m$, si ottiene $r_{0{,}5\,\mathrm{m}} \sim 0{,}403\,\mathrm{cm}$, valore maggiore del raggio del foro. Di conseguenza la portata d'acqua che entra nel cilindro varia nel tempo fino a che il foro non è a un'altezza h_c rispetto al livello dell'acqua per cui $r_{h_c} = R$. Quindi ponendo $r_{h_c} = R$ e risolvendo per h_c si ottiene

$$h_c = H' - (\frac{r^4}{R^4} - 1)\frac{v_0^2}{2g} = 0{,}3686\,\mathrm{m}.$$

Ora notiamo che sul contenitore agiscono unicamente la forza peso e la forza di Archimede (la forza esercitata dall'acqua uscente dal rubinetto è compensata dal meccanismo ignoto), di conseguenza il contenitore tenderà a stabilizzarsi a un'altezza tale che il livello dell'acqua interno sia uguale a quello esterno. Infatti il contenitore ha massa trascurabile, quindi basta questa condizione per avere equilibrio stabile. Inoltre, come specificato nel testo, possiamo assumere che il cilindro si trovi all'altezza di equilibrio in ogni istante, cioè che il livello dell'acqua interna sia sempre uguale a quello dell'acqua esterna.
Ora possiamo trovare il tempo impiegato dall'acqua per raggiungere il fondo del contenitore partendo dal foro del contenitore stesso utilizzando la formula per il moto uniformemente accelerato:

$$H - v_H \delta t - \frac{1}{2} g \delta t^2 = 0,$$

che risolvendo per t dà

$$\delta t = \frac{-v_H \pm \sqrt{v_H^2 + 2gH}}{g}.$$

Poichè ci interessa il risultato con il tempo positivo, avremo

$$\delta t = \frac{\sqrt{v_H^2 + 2gH} - v_H}{g},$$

che, sostituendo il valore di v_H, diventa

$$\delta t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2g(H' - H) + 2gH} - \sqrt{v_0^2 + 2g(H' - H)}}{g} \sim 0{,}049\,\mathrm{s}.$$

Sostituendo nella formula precedente v_0 a v_H e H' a H, otteniamo il tempo impiegato dall'acqua per passare dal rubinetto all'interno del contenitore:

$$\Delta t = \frac{\sqrt{v_0^2 + 2gH'} - v_0}{g} \sim 0{,}75\,\mathrm{s}.$$

Osserviamo che $\Delta t \gg \delta t$, cosa che giustifica l'approssimazione suggerita nel testo. Possiamo quindi assumere per facilitare i calcoli che l'acqua che passa il foro sia immediatamente sul fondo del recipiente, l'equilibrio venga subito raggiunto e il flusso d'acqua vari istantaneamente con l'altezza del coperchio del contenitore rispetto al livello dell'acqua.
A questo punto bisogna solo calcolare il tempo effettivo di riempimento fino a quando il foro è a quota h_c e quello da quota h_c a quota 0.
Partiamo dalla relazione che lega la quota h del foro al volume V di acqua dentro al contenitore:

$$h = H - \frac{V}{\pi R'^2}.$$

Derivando entrambi i membri rispetto al tempo t otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{\phi}{\pi R'^2},$$

dove ϕ è la portata volumetrica d'acqua che passa attraverso il foro, per cui vale

$$\phi = \pi R^2 v_h.$$

Sostituendo ϕ, otteniamo

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -\frac{R^2}{R'^2} v_h,$$

che è un equazione differenziale a variabili separabili. Sostituendo l'espressione per v_h, possiamo riscriverla come

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{v_0^2 + 2g(H' - h)}} = -\frac{R^2}{R'^2}\mathrm{d}t.$$

Si ottiene la soluzione integrando entrambi i membri:

$$-\int_H^{h_c} \frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{v_0^2 + 2g(H' - h)}} = \int_0^{t_c} \frac{R^2}{R'^2}\mathrm{d}t,$$

$$\left[\frac{\sqrt{v_0^2 + 2g(H' - h)}}{g}\right]_H^{h_c} = \frac{R^2}{R'^2}t_c.$$

Isolando t_c e sostituendo i valori numerici si ottiene

$$t_c \sim 132{,}4\,\mathrm{s}.$$

Per calcolare il tempo rimanente fino al riempimento invece basta dividere il volume rimasto da riempire per il flusso, poichè quest'ultimo è costante. Quindi il tempo totale di riempimento t_{tot} è

$$t_{tot} = t_c + \frac{\pi R'^2 h_c}{\pi r^2 v_0} \sim 132{,}4\,\mathrm{s} + 368{,}9\,\mathrm{s} = 501{,}3\,\mathrm{s}$$

PROB. 9 — Gas in una scatola - 140 pt. –

1. Mettiamoci nel sistema di riferimento solidale con la scatola. L'accelerazione del sistema nella direzione del moto è

   $$a = -\frac{F}{M + m},$$

   dunque su ogni particella di massa $\mathcal{M}$ di gas agisce una forza apparente $f = \frac{\mathcal{M}}{M+m}F$. Questa forza è costante nel tempo e la situazione è la stessa di un gas posto in un campo gravitazionale $g_{\text{eff}} = \frac{F}{M+m}$. Di conseguenza la distribuzione all'equilibrio del gas è indipendente dal tempo, così come la pressione.

   Consideriamo ora uno strato di gas con spessore infinitesimo $\mathrm{d}x$ ed area S. All'equilibrio la differenza di pressione tra le due facce deve uguagliare la forza sentita dal gas:

   $$\left(-p(x + \mathrm{d}x) + p(x)\right) S = -S\mathrm{d}p = a\mathrm{d}m.$$

   Inoltre, per questo strato infinitesimo, dall'equazione di stato dei gas perfetti si trova:

   $$p\mathrm{d}V = pS\mathrm{d}x = \frac{RT}{\mu}\mathrm{d}m \implies \mathrm{d}m = \frac{pS\mu}{RT}\mathrm{d}x.$$

   Possiamo quindi ricavare $\mathrm{d}m$ dall'ultima equazione e sostituirne il valore nella precedente. Si ottiene allora:

   $$\mathrm{d}p = -\frac{\mu p a}{RT}\mathrm{d}x.$$

   Integrando:

   $$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{p} = \int_0^x -\frac{\mu a}{RT}\mathrm{d}x'.$$

   Da ciò si ottiene alla fine:

   $$p(x) = p(0)e^{\lambda x},$$

con $\lambda = \frac{-\mu a}{RT} = \frac{\mu F}{(M+m)RT}$. D'altro canto, integrando la seconda equazione si trova:

$$p(L) - p(0) = p(0)\left(e^{\lambda L} - 1\right) = -\frac{ma}{S} = \frac{m}{M+m}\frac{F}{S}.$$

Si ha allora che:

$$p_0 = \frac{m}{M+m}\frac{F}{S(e^{\lambda L} - 1)},$$

da cui troviamo infine:

$$p(x) = \frac{m}{M+m}\frac{F}{S}\frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda L} - 1}.$$

2. Quando sul sistema (scatola + gas) agisce una forza F, il suo moto ovviamente è uniformemente accelerato e vale:

$$v(t) = v_0 + at.$$

Quando la forza smette di agire, detto T il tempo totale per cui ha agito, si ha $v(T) = 0$. Lo spazio percorso in questa prima fase è:

$$\Delta s_1 = v_0 T + \frac{1}{2}aT^2 = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{(M+m)v_0^2}{2F}.$$

Il gas ora non ha una distribuzione omogenea, pertanto la scatola compirà un ulteriore spostamento in avanti Δs_2 mentre il gas si redistribuisce. La posizione del centro di massa del gas rispetto alla parete posteriore quando questo deve ancora redistribuirsi sarà:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{m}\int_0^L x\mathrm{d}m.$$

Sostituendo l'espressione per dm trovata in precedenza, troviamo

$$x_{\text{cm}} = \frac{S\mu}{mRT}\int_0^L xp(x)\mathrm{d}x.$$

Svolgendo l'integrale utilizzando l'espressione per $p(x)$ trovata al punto 1, arriviamo a:

$$x_{\text{cm}} = L\frac{e^{\lambda L}}{e^{\lambda L} - 1} - \frac{1}{\lambda}.$$

Dal momento che non sono presenti forze esterne, il centro di massa del sistema (scatola+gas) resta fermo nel sistema di riferimento inerziale esterno. Se la scatola si sposta di Δs_2 durante la ridistribuzione, si avrà:

$$M\frac{L}{2} + mx_{\text{cm}} = (M+m)\left(\frac{L}{2} + \Delta s_2\right)$$

$$\Longrightarrow \Delta s_2 = \frac{m}{m+M}\left(x_{\text{cm}} - \frac{L}{2}\right) = \frac{mL}{M+m}\left(\frac{e^{\lambda L}}{e^{\lambda L} - 1} - \frac{1}{\lambda L} - \frac{1}{2}\right).$$

Lo spostamento totale è quindi:

$$\Delta s_{\text{tot}} = \Delta s_1 + \Delta s_2 = \frac{(M+m)v_0^2}{2F} + \frac{mL}{M+m}\left(\frac{e^{\lambda L}}{e^{\lambda L} - 1} - \frac{1}{\lambda L} - \frac{1}{2}\right).$$

PROB. 10 — INFINITI PISTONI - 145 PT. ——

1. Poiché il sistema è isolato dall'esterno vale che l'energia totale, come energia interna del gas e energia potenziale gravitazionale, si conserva. Per ipotesi data dal testo, l'effetto della gravità sul gas è trascurabile. Se nell'istante iniziale il gas nello scompartimento più in alto si trova in condizioni p_0, V_0, T_0, quello nello scompartimento intermedio sarà in condizioni $p_0 + \frac{mg}{S}, V_0, T_0 + \frac{mg}{SnR}V_0$ e quello nello scompartimento in basso in condizioni $p_0 + \frac{2mg}{S}, V_0, T_0 + \frac{2mg}{SnR}V_0$. Poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale alla base del cilindro. L'energia nell'istante iniziale è dunque

$$E_0 = \frac{3}{2}nR\left(T_0 + T_0 + \frac{mg}{SnR}V_0 + T_0 + \frac{2mg}{SnR}V_0\right) + mg2L + mgL = \frac{9}{2}nRT_0\left(1 + \frac{mgL}{nRT_0}\right) + 3mgL.$$

L'energia nell'istante finale, dopo che il sistema ha avuto il tempo di termalizzare, è

$$E_1 = \frac{9}{2}nRT_1 + mg2L + mgh,$$

dove chiamiamo h l'altezza finale a cui si trova il setto più in basso. Vogliamo adesso determinare un'espressione per h.
Alla fine il sistema, oltre ad essere all'equilibrio termico, è anche all'equilibrio meccanico. Identifichiamo con il pedice B le grandezze che fanno riferimento allo scompartimento di mezzo e con il pedice C quelle che fanno riferimento allo scompartimento in basso. Vale che

$$p_B V_B = nRT_1, \qquad p_C V_C = nRT_1.$$

Poiché il setto più in alto è fissato vale $V_B + V_C = 2V_0$, e poiché il setto in basso è all'equilibrio meccanico vale $p_C = p_B + \frac{mg}{S}$. Otteniamo in questo modo l'equazione

$$\left(p_C - \frac{mg}{S}\right)(2V_0 - V_C) = p_C V_C,$$

$$2p_C V_0 - p_C V_C - \frac{2mgV_0}{S} + \frac{mg}{S}V_C = p_C V_C.$$

Usiamo il fatto che $p_C = nRT_1$, che $V_0 = SL$ e $V_C = Sh$. Otteniamo

$$2nRT_1\frac{L}{h} - 2nRT_1 - 2mgL + mgh = 0,$$

$$mgh^2 - 2(nRT_1 + mgL)h + 2nRT_1 L = 0.$$

Abbiamo ottenuto in questo modo un'equazione di secondo grado, risolvendo per h otteniamo che le due soluzioni possibili sono

$$h = \frac{nRT_1 + mgL \pm \sqrt{(nRT_1)^2 + (mgL)^2}}{mg}.$$

Possiamo notare che se scegliessimo il segno positivo avremmo che $h > 2L$, chiaramente assurdo. Prendiamo allora la soluzione con il segno meno.

$$h = L + \frac{nRT_1}{mg} - \frac{nRT_1}{mg}\sqrt{1 + \left(\frac{mgL}{nRT_1}\right)^2}.$$

Espandendo in $nRT_1 \gg mgL$ otteniamo

$$h \approx L + \frac{nRT_1}{mg} - \frac{nRT_1}{mg}\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{mgL}{nRT_1}\right)^2\right) = L\left(1 - \frac{1}{2}\frac{mgL}{nRT_1}\right),$$

dove abbiamo dovuto espandere considerando i termini in $\left(\frac{mgL}{nRT_1}\right)^2$ perché se ci fossimo fermati al primo ordine avremmo avuto la soluzione banale $h \approx L$.
Possiamo adesso sostituire nella conservazione dell'energia e otteniamo

$$\frac{9}{2}nRT_0\left(1+\frac{mgL}{nRT_0}\right)+3mgL=\frac{9}{2}nRT_1+2mgL+mgL\left(1-\frac{1}{2}\frac{mgL}{nRT_1}\right),$$

$$9nRT_1^2-9nRT_0\left(1+\frac{mgL}{nRT_0}\right)T_1-\frac{1}{2}\frac{(mgL)^2}{nR}=0.$$

Otteniamo in questo modo un'equazione di secondo grado, risolvendola troviamo

$$T_1=\frac{3(nRT_0+mgL)\pm\sqrt{9(nRT_0+mgL)^2+2(mgL)^2}}{6nR}.$$

Espandendo al primo ordine otteniamo che

$$T_1\approx\frac{T_0}{2}+\frac{mgL}{2nR}\pm\frac{T_0}{2}\left(1+\frac{mgL}{nRT_0}\right).$$

La soluzione con il segno meno ci da $T_1=0$, che è chiaramente assurda, prendiamo allora la soluzione con il segno più e otteniamo

$$\boxed{T_1=T_0+\frac{mgL}{nR}=T_0\left(1+\frac{mgL}{nRT_0}\right)}$$

2. Denotiamo con il pedice $k=0,\ldots N-1$ il k-esimo scompartimento a partire dall'alto. Le variabili finali, quando il sistema si trova all'equilibrio termico, sono denotate da un $'$.
Nell'istante iniziale le condizioni del k-esimo scompartimento sono

$$p_k=p_0+k\frac{Mg}{(N-1)S},\qquad V_k=V_0,\qquad T_k=T_0+k\frac{Mg}{SnR}\frac{N}{N-1}V_0.$$

L'energia interna del gas è data da

$$U_{\text{gas}}=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{3}{2}\frac{n}{N}RT_k=\frac{3}{2}nRT_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{MgL}{nRT_0}\right).$$

Per semplicità (altrimenti al posto dell'indice k dovremmo usare $N-k-1$) in questo caso poniamo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale sulla cima del cilindro. Il k-esimo setto (che funge da "tetto" al k-esimo scompartimento) si trova a quota $-k\frac{L}{N}$. L'energia potenziale gravitazionale, sempre trascurando l'energia potenziale del gas, è data da

$$U_G=\sum_{k=0}^{N-1}-\frac{M}{N-1}gk\frac{L}{N}=-\frac{MgL}{2}.$$

L'energia iniziale totale è dunque

$$E_0=\frac{3}{2}nRT_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{MgL}{nRT_0}\right)-\frac{MgL}{2}.$$

Alla fine, quando il sistema torna all'equilibrio, l'energia interna del gas sarà

$$U'_{\text{gas}}=\frac{3}{2}nRT'.$$

Chiamiamo adesso h'_k l'altezza del k-esimo scompartimento, cioè vale che $V'_k = Sh'_k$, e H'_k la quota del k-esimo setto, cioè vale $H'_k = -(h'_0 + ... + h'_{k-1})$. L'energia finale è data da

$$E' = \frac{3}{2}nRT' + \frac{Mg}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} H'_k.$$

Cerchiamo adesso un'espressione per h'_k.
Alla fine il sistema si trova nuovamente sia all'equilibrio termico che meccanico, dunque il k-esimo scompartimento si trova in condizioni

$$p'_k = p'_0 + k\frac{Mg}{(N-1)S}, \qquad V'_k, \qquad T'_k = T'.$$

Per ogni scompartimento vale inoltre

$$p'_k V'_k = \frac{n}{N}RT'.$$

Possiamo allora sostituire e risolvere l'equazione per trovare V'_k in funzione di V'_0, T' e dei parametri noti.

$$V'_k = \frac{nRT'}{N\left(p'_0 + k\frac{Mg}{(N-1)S}\right)} = \frac{V'_0}{\left(1 + k\frac{NMgV'_0}{(N-1)SnRT'}\right)} \approx V'_0\left(1 - k\frac{NMgV'_0}{(N-1)SnRT'}\right).$$

$$\implies h'_k \approx h'_0\left(1 - k\frac{NMgh'_0}{(N-1)nRT'}\right).$$

Il volume totale del cilindro chiaramente rimane invariato, dunque deve valere che

$$\sum_{k=0}^{N-1} V'_k = NV_0,$$

$$NV'_0 - \frac{NMgV'^2_0}{(N-1)SnRT'}\frac{(N-1)N}{2} = NV_0.$$

Semplificando e con alcune manipolazioni algebriche arriviamo all'equazione di secondo grado

$$\frac{1}{2}\frac{MgL}{nRT'}\frac{N}{L}h'^2_0 - h'_0 + \frac{L}{N} = 0.$$

La soluzione esatta è

$$h'_0 = \frac{nRT'}{MgL}\frac{L}{N}\left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{MgL}{nRT'}}\right).$$

Possiamo notare come la soluzione con il segno più sia subito da scartare, dunque prendiamo la soluzione con il segno meno. Vorremmo adesso espandere nel parametro $\frac{MgL}{nRT'} \ll 1$; tuttavia, vale anche $\frac{nRT'}{MgL} \gg 1$, quindi dobbiamo espandere la radice quadrata al secondo ordine per ottenere un risultato al primo ordine. Otteniamo

$$h'_0 \approx \frac{L}{N}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{MgL}{nRT'}\right).$$

Possiamo in questo modo calcolare h'_k per ogni k. Fermanoci al primo ordine otteniamo l'espressione finale

$$h'_k \approx \frac{L}{N}\left(1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{k}{N-1}\right)\frac{MgL}{nRT'}\right).$$

Da questa espressione possiamo anche determinare che gli scompartimenti più in alto, identificati da k piccolo, si espandono, mentre quelli più in basso, caratterizzati da k grande,

si contraggono.
Arrivati a questo punto possiamo calcolare H'_k

$$H'_k = -\sum_{i=0}^{k-1} h'_i = -k\frac{L}{N}\left(1 + \left(\frac{1}{4} - \frac{k-1}{N-1}\right)\frac{MgL}{nRT'}\right).$$

Possiamo adesso trovare l'energia potenziale gravitazionale in funzione di T', ossia la somma

$$U_G = \frac{Mg}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} H'_k$$

Calcolare questa somma è possibile ma abbastanza tedioso, tuttavia nel limite di $N \to \infty$ possiamo trasformarla in un integrale: l'indice k/N (o simili) diventa la variabile di integrazione x che varia in $(0,1)$ e l'elemento infinitesimo $1/N$ (o simili) diventa il differenziale dx. Otteniamo in questo modo

$$U_G \approx MgL\int_0^1 -x\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\frac{MgL}{nRT'}x\mathrm{d}x + \frac{MgL}{nRT'}x^2\mathrm{d}x.$$

Risolvendo l'integrale otteniamo

$$U_G = -\frac{MgL}{2}\left(1 - \frac{5}{12}\frac{MgL}{nRT'}\right).$$

Se avessimo calcolato esplicitamente le sommatorie e poi preso il limite per $N \to \infty$ avremmo ottenuto lo stesso risultato.
Arrivati a questo punto il problema è praticamente concluso: sostituiamo nella conservazione dell'energia e risolviamo per T'.

$$\frac{3}{2}nRT_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{MgL}{nRT_0}\right) - \frac{MgL}{2} = \frac{3}{2}nRT' - \frac{MgL}{2}\left(1 - \frac{5}{12}\frac{MgL}{nRT'}\right).$$

Otteniamo l'equazione di secondo grado

$$\frac{3}{2}nRT'^2 - \left(\frac{3}{2}nRT_0 + \frac{3}{4}MgL\right)T' + \frac{5}{24}\frac{(MgL)^2}{nR} = 0.$$

La soluzione esatta è dunque

$$T' = \frac{T_0}{2} + \frac{1}{4}\frac{MgL}{nR} \pm \frac{T_0}{2}\sqrt{1 + \frac{MgL}{nRT_0} - \frac{11}{36}\left(\frac{MgL}{nRT_0}\right)^2}.$$

Anche in questo caso la soluzione col segno meno è da scartare, prendiamo allora solo la soluzione col segno più ed espandiamo, ottenendo

$$\boxed{T' = T_0 + \frac{1}{2}\frac{MgL}{nR} = T_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{MgL}{nRT_0}\right)}$$