

Soluzioni del Pretest di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

20 novembre 2025

PROB. 1 — TISANINA? —————

Sappiamo che, per un certo volume V d'acqua, il calore necessario affinché cambi temperatura di un certo ΔT è:

$$Q = c\rho V\Delta T,$$

dove c e ρ sono rispettivamente il suo calore specifico e la sua densità. Dal momento che l'energia si conserva e che i recipienti sono isolanti, se lasciamo termalizzare due volumi V_1 e V_2 d'acqua, con temperature rispettivamente di T_1 , T_2 , imponendo che il calore scambiato con l'esterno sia nullo si trova facilmente che la temperatura di equilibrio raggiunta è:

$$T_{eq} = \frac{V_1 T_1 + V_2 T_2}{V_1 + V_2}.$$

Quindi, chiamando ΔV il volume d'acqua che viene versato nel primo passaggio dal contenitore con acqua a temperatura $T_1 = 90^\circ\text{C}$ (di volume V_1) a quello con acqua a temperatura $T_2 = 20^\circ\text{C}$ (di volume V_2), dopo il primo scambio la nuova temperatura dell'acqua nel secondo recipiente (con nuovo volume $V_2' = V_2 + \Delta V$) è:

$$T_2' = \frac{T_1 \Delta V + T_2 V_2}{V_2 + \Delta V}.$$

Dopo il secondo scambio, la nuova temperatura nel primo recipiente (che dovrà essere $T_1' = 89^\circ\text{C}$) è:

$$T_1' = \frac{T_1(V_1 - \Delta V) + T_2' \Delta V}{V_1} = \frac{T_1(V_1 - \Delta V) + \frac{T_1 \Delta V + T_2 V_2}{V_2 + \Delta V} \Delta V}{V_1}.$$

Risolvendo per ΔV si ricava:

$$\Delta V = \frac{V_1 V_2 (T_1 - T_1')}{V_2 (T_1 - T_2) - V_1 (T_1 - T_1')}.$$

Risposta: $\boxed{7,6920 \times 10^{-2} \text{ L.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 2 — LA TORRE... CADENTE —————

Condizione necessaria affinché il sistema sia in equilibrio è che la somma dei momenti totali sia pari a zero. Si consideri positivo un momento angolare che ha verso uscente dalla pagina, ovvero

*segreteria.stagefisica@sns.it

per rotazioni in senso antiorario. Prendiamo come perno l'estremità in basso a destra del blocco inferiore. La somma dei momenti esterni rispetto a questo punto proviene dalla forza peso dei tre blocchi, più la forza normale agente sull'estremità in basso a sinistra del blocco inferiore. Se la somma dei tre momenti è positiva, allora la forza normale permette al sistema di rimanere in equilibrio, altrimenti esso si sbilancia. La somma dei momenti è data da

$$\tau = mg\frac{b}{2} + mg\frac{b}{2} - mg\left(\frac{a}{2} - b\right) = 2mgb - mg\frac{a}{2}.$$

La condizione $\tau > 0$ impone che

$$a \leq 4b.$$

Otteniamo che il valore critico è pari a 4.

Risposta: 4.0000. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 3 — LA FURBIZIA DI UN TEORICO —

Dal circuito si vede che la resistenza tra i punti 3 e 4 è data dal parallelo tra $R_1 + R_2$ e $R_3 + R_4$; in maniera simile la resistenza tra i punti 1 e 2 è pari al parallelo tra $R_1 + R_3$ e $R_2 + R_4$. Da ciò avremo che

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R_1 + R_3} + \frac{1}{R_2 + R_4} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)},$$

$$\frac{1}{R_{34}} = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}.$$

Eguagliando le due espressioni dobbiamo avere che

$$R_1 R_2 + R_3 R_4 = R_1 R_3 + R_2 R_4;$$

riscrivendo l'espressione otteniamo

$$(R_1 - R_4)R_2 = (R_1 - R_4)R_3.$$

Se $R_1 \neq R_4$, la condizione diventa $R_2 = R_3$. Dato che vogliamo che l'equazione sia soddisfatta per qualsiasi scelta di R_2 e R_3 , non abbiamo alternativa che porre $R_1 = R_4$.

Risposta: 1.0000. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 4 — CHE COINCIDENZA!

La proiezione dell'accelerazione di gravità sul piano inclinato vale, in modulo, $\frac{gh}{\sqrt{L^2+h^2}}$, pertanto la prima particella raggiunge il punto C a un tempo T dato da

$$\frac{ghT^2}{2\sqrt{L^2+h^2}} = \sqrt{L^2+h^2} \implies T = \sqrt{\frac{2(L^2+h^2)}{gh}}.$$

Per conservazione dell'energia, la velocità della prima particella quando essa raggiunge il punto C vale, in modulo, $v = \sqrt{2hg}$. Inoltre, sempre per conservazione dell'energia, la velocità con cui la seconda particella viene lanciata da B ha lo stesso modulo di quella con cui raggiunge C , dunque, per le ipotesi del problema, tale modulo è proprio v . Sia α l'angolo con cui la seconda particella

viene lanciata da B , preso rispetto all'orizzontale. Allora, considerando la sua legge oraria, la condizione che essa raggiunga C contemporaneamente alla prima particella si scrive come

$$v \cos \alpha T = L, \quad v \sin \alpha = \frac{gT}{2}.$$

Da qui, sostituendo le espressioni per v e T , otteniamo

$$\cos \alpha = \frac{L}{2\sqrt{L^2 + h^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{L^2 + h^2}}{2h},$$

e, sfruttando l'identità $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, si ottiene infine

$$4 = \frac{L^2 + h^2}{h^2} + \frac{L^2}{L^2 + h^2},$$

da cui la soluzione è

$$L = h\sqrt{\frac{1 + \sqrt{13}}{2}}.$$

Risposta: $\boxed{7,5874 \times 10^{-1} \text{ m.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 5 — GIUSTO UN ALTRO

Chiamiamo M la massa d'acqua inizialmente presente, m la massa d'acqua aggiunta ogni volta tramite il cucchiaino, T la temperatura iniziale dell'acqua, T' la temperatura dell'acqua calda aggiunta di volta in volta, $\Delta T = 1^\circ\text{C}$, $\Delta T' = 0,9^\circ\text{C}$ e Δt l'incremento totale cercato. Poiché il calorimetro è termicamente isolato, a ogni aggiunta d'acqua tramite cucchiaino il calore ceduto da quest'ultima all'acqua già presente eguaglia il calore totale ricevuto dalla prima. Imponendo che, dopo il primo scambio, si raggiunga l'equilibrio termico, otteniamo allora la condizione

$$McT + mcT' = (M + m)c(T + \Delta T),$$

dove c è il calore specifico dell'acqua, che può essere semplificato. Analogamente, dopo il secondo scambio si può scrivere

$$(M + m)(T + \Delta T) + mT' = (M + 2m)(T + \Delta T + \Delta T'),$$

e, infine,

$$(M + 2m)(T + \Delta T + \Delta T') + 98mT' = (M + 100m)(T + \Delta t).$$

Risulta allora sufficiente risolvere questo sistema per Δt . Un possibile modo di procedere è isolare inizialmente, dalla prima equazione,

$$mT' = T + \Delta T \left(1 + \frac{M}{m}\right).$$

Dopodiché, si sostituisce tale espressione nella seconda equazione, il che permette di ricavare

$$\frac{M}{m} = \frac{2\Delta T'}{\Delta T - \Delta T'}, \quad T' = T + \frac{\Delta T(\Delta T + \Delta T')}{\Delta T - \Delta T'}.$$

Infine, sostituendo quanto ricavato nella terza equazione, si arriva al risultato finale:

$$\Delta t = \frac{50\Delta T(\Delta T + \Delta T')}{50\Delta T - 49\Delta T'}.$$

Risposta: $\boxed{1,6102 \times 10^1 \text{ }^\circ\text{C}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 6 — CHE FATICA!

In base all'intensità di F , possono succedere due cose: i blocchi 1 e 2 si muovono all'unisono, oppure cominciano a slittare uno sull'altro. Chiamiamo F_{12} il modulo della forza di attrito che il blocco 2 esercita sul blocco 1, F_{43} il modulo della forza di attrito che il blocco 3 esercita sul blocco 4. Sia inoltre T la tensione ai capi della fune.

Se supponiamo che tutti i blocchi si muovano insieme, otteniamo che

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a = \frac{F}{2(m + M)}.$$

Occorre però verificare che valga $F_{12} \leq \mu mg$. Considerando come unico sistema i blocchi 2,3,4, F_{12} è l'unica forza esterna orizzontale agente su tale sistema, per cui si deve avere

$$F_{12} = (2m + M)a = \frac{2m + M}{2(m + M)}F \leq \mu mg,$$

e si vede che tale disuguaglianza non è rispettata.

Si scopre che l'unico caso consistente con le condizioni di attrito è quello in cui i blocchi 3 e 4 si muovono insieme, mentre i blocchi 1 e 2 slittano tra loro. In questo caso abbiamo

$$a_3 = a_4 = a_2.$$

Poiché la tensione T è l'unica forza esterna orizzontale agente sul sistema dei blocchi 3 e 4, si deve avere

$$T = (m + M)a_4.$$

A questo punto, sapendo che $F_{12} = \mu mg$, abbiamo per il blocco 1

$$Ma_1 = F - \mu mg,$$

mentre per il blocco 2

$$ma_2 = \mu mg - T = \mu mg - (m + M)a_4 = \mu mg - (m + M)a_2;$$

da cui

$$a_2 = a_4 = \frac{m}{2m + M}\mu g$$

e arriviamo al risultato

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{(F - \mu mg)(2m + M)}{mM\mu g}.$$

Risposta: $\boxed{5.7380}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 7 — MALEDETTI SUMERI!

Essendo il circuito in cui scorre corrente formato dai due binari di lunghezza x in serie con la resistenza della sbarra, la resistenza complessiva quando la sbarra è a distanza x dal generatore è:

$$\tilde{R}(x) = R + 2\mathcal{R}x.$$

Perciò, per la legge di Ohm, la corrente che passa attraverso la sbarretta è:

$$I(x) = \frac{V}{R + 2\mathcal{R}x}.$$

Di conseguenza la forza magnetica nella direzione x , che fino al primo momento in cui la sbarretta si ferma è contraria al moto, è:

$$F(x) = -\frac{V\ell B}{R + 2\mathcal{R}x}.$$

Per questo sistema unidimensionale è possibile trovare un'energia potenziale $U(x)$ tale che valga $F(x) = -\frac{dU}{dx}$ (nonostante in generale la forza magnetica non sia conservativa), e possiamo porne liberamente lo zero in $x = 0$:

$$U(x) = \frac{V\ell B}{2\mathcal{R}} \int_0^x \frac{dy}{\frac{R}{2\mathcal{R}} + y};$$

$$U(x) = \frac{V\ell B}{2\mathcal{R}} \ln\left(\frac{\frac{R}{2\mathcal{R}} + x}{\frac{R}{2\mathcal{R}}}\right).$$

Avendo trovato un potenziale, l'energia totale (cinetica e potenziale) di questo sistema ausiliario si conserva. Imponendo che la velocità della sbarretta si annulli si trova

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{V\ell B}{2\mathcal{R}} \left[\ln\left(1 + \frac{2\mathcal{R}x}{R}\right) \right],$$

da cui:

$$x = \frac{R}{2\mathcal{R}} \left[\exp\left(\frac{mv_0^2\mathcal{R}}{V\ell B}\right) - 1 \right].$$

Risposta: $\boxed{1,2391 \times 10^1 \text{ m.}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 8 — ANELLI IN CORSA

Sia m la massa di ciascun anello. Poiché $v_1 > v_2$, a un certo punto tra i due anelli avviene un urto. Poiché i due anelli sono identici, l'urto è elastico, e l'attrito non può essere impulsivo nella situazione data, si ha che, subito dopo l'urto, le velocità dei loro due centri di massa si scambiano, mentre le velocità angolari restano immediatamente le stesse. Detto r il raggio di ciascun anello, i valori iniziali delle velocità angolari sono

$$\omega_1 = \frac{v_1}{r}, \quad \omega_2 = \frac{v_2}{r},$$

rivolte in senso orario. Perciò, subito dopo l'urto, la velocità del punto di contatto tra il primo anello e il suolo è $v_2 - \omega_1 r = v_2 - v_1 < 0$, mentre, per il secondo, è $v_1 - \omega_2 r = v_1 - v_2 > 0$. Segue che, sul primo anello, l'attrito dinamico (di modulo $mg\mu$) è rivolto verso destra, mentre sul secondo è rivolto a sinistra. Scrivendo la Seconda Legge di Newton per ciascuno dei due anelli, si ottiene allora

$$mg\mu = m\ddot{x}_1, \quad -mg\mu = m\ddot{x}_2,$$

mentre, scrivendo la seconda equazione cardinale, si trova

$$-mg\mu r = I\ddot{\Omega}_1, \quad mg\mu r = I\ddot{\Omega}_2,$$

dove il momento di inerzia I , trattandosi di un anello, vale mr^2 , e le quantità Ω_1 e Ω_2 sono le due velocità angolari. Da queste equazioni si ottiene, integrando (ponendo a $t = 0$ l'istante dell'urto):

$$\dot{x}_1(t) = v_2 + g\mu t, \quad \dot{x}_2(t) = v_1 - g\mu t, \quad \Omega_1(t) = \frac{v_1}{r} - \frac{g\mu t}{r}, \quad \Omega_2(t) = \frac{v_2}{r} + \frac{g\mu t}{r}.$$

Da queste espressioni, si deduce che, al tempo $t_0 = \frac{v_1 - v_2}{2g\mu}$, si verifica $\dot{x}_1(t_0) = r\Omega_1(t_0)$ e $\dot{x}_2(t_0) = r\Omega_2(t_0)$, dunque, da quel tempo in poi, il moto di ciascun anello torna a essere di puro rotolamento, con la stessa velocità del centro di massa data da $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$, perciò la distanza tra i due anelli resta costante. Resta dunque da calcolare di quanto essa varia nell'intervallo temporale $[0, t_0]$. In tale intervallo, la differenza tra le due velocità è

$$v_{\text{rel}}(t) = \dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t) = v_1 - v_2 - 2g\mu t,$$

da cui la distanza finale tra i due è

$$d = \int_0^{t_0} (v_1 - v_2 - 2g\mu t) dt = \frac{(v_1 - v_2)^2}{4g\mu}.$$

Risposta: $\boxed{1,0197 \times 10^{-1} \text{ m.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 9 — LENTE ELETTRONICA

Chiamiamo x l'asse tangente al condensatore, mentre y quello normale. Durante tutto il moto la velocità lungo x non cambia, e avremo dunque

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_i = v_x = v \cos \theta_f.$$

Il condensatore fa lavoro sull'elettrone, e alla fine della traversata la sua energia cinetica aumenta della quantità eV (prendiamo la carica fondamentale e come positiva). Perciò avremo che

$$K + eV = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{1}{2} m_e \frac{v_x^2}{\cos^2 \theta_f};$$

inoltre, sapevamo che

$$K = \frac{1}{2} m_e v_0^2 = \frac{1}{2} m_e \frac{v_{0x}^2}{\cos^2 \theta_i}$$

Prendendo il rapporto tra le ultime due equazioni otteniamo che

$$eV = \left(\frac{\cos^2 \theta_i}{\cos^2 \theta_f} - 1 \right) K$$

Ovvero

$$V = \frac{1}{2} \frac{100 \text{ eV}}{e} = 50 \text{ V.}$$

Risposta: $\boxed{5,0000 \times 10^1 \text{ V.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 10 — CURVE CON ATTRITO

La forza di attrito agente sulla perlina vale $F_a = \mu N$, dove N è la reazione normale del filo lungo i sostegni circolari. Sul primo arco si ha:

$$mr_1\omega^2 = N,$$

$$mr_1\dot{\omega} = mr_1\omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\mu N,$$

dove abbiamo utilizzato la regola della catena per le derivate, e le leggi di Newton parallelamente e perpendicolarmente al sostegno. Da questo

$$\frac{d\omega}{d\theta} + \mu\omega = 0.$$

Integrando, o notando la somiglianza con l'equazione differenziale per il decadimento radioattivo, si ricava:

$$\omega(\theta) = \omega_0 e^{-\mu\theta}.$$

Quindi il rapporto tra la velocità con cui esce dal primo arco e quella con cui vi è entrata è $e^{-\mu\frac{\pi}{2}}$. Ripetendo lo stesso ragionamento per il secondo arco si ottiene lo stesso risultato, e combinandoli si ha $\frac{v_1}{v_0} = e^{-\mu\pi}$.

Risposta: $4,5594 \times 10^{-1}$. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 11 — IL PICCOLO PRINCIPE

Sia R il raggio del pianeta. La massa del pianeta è allora data da

$$M = \frac{4\pi\rho R^3}{3},$$

pertanto l'accelerazione di gravità sulla sua superficie vale

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{4\pi\rho GR}{3}.$$

Il Piccolo Principe inizia a sentirsi senza peso quando si annulla la forza di reazione normale tra i suoi piedi e il terreno. Ciò avviene quando la forza di attrazione gravitazionale eguaglia da sola il prodotto tra la sua massa m e la sua accelerazione. Se v è la velocità del Piccolo Principe rispetto al suolo, allora, mettendosi a correre lungo l'equatore in verso concorde con quello di rotazione del pianeta, raggiunge una velocità V (calcolata rispetto a un sistema di riferimento inerziale) data da

$$V = v + \frac{2\pi R}{T},$$

pertanto la sua accelerazione (dovuta al moto circolare uniforme che sta compiendo) vale

$$a = \frac{V^2}{R} = \frac{(v + \frac{2\pi R}{T})^2}{R}.$$

Si ottiene dunque l'equazione

$$gm = am \implies \frac{4\pi\rho GR}{3} = \frac{(v + \frac{2\pi R}{T})^2}{R} \implies \sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}}R = v + \frac{2\pi R}{T},$$

da cui è immediato ricavare

$$R = \frac{v}{\sqrt{\frac{4\pi\rho G}{3}} - \frac{2\pi}{T}}.$$

Risposta: $1,8863 \times 10^3$ m. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 12 — DEFLESSIONE DI CARICHE

Se le particelle non cambiano traiettoria quando entrambi i campi sono presenti, la forza magnetica e quella elettrica devono cancellarsi a vicenda. Visto che la direzione del moto è ortogonale a entrambi i campi, la velocità delle particelle in ingresso vale

$$v_0 = \frac{E}{B}.$$

Disattivando il campo magnetico e trattando il condensatore come sottile, le particelle saranno deflesse dalla forza elettrica agente su di esse quando si trovano all'interno del condensatore. La velocità $v_x = v_0$ rimarrà costante, mentre quella lungo y all'uscita sarà

$$v_y = \frac{QE}{m} \frac{\ell}{v_0} = \frac{qB\ell}{m}.$$

Le particelle usciranno dal condensatore avendo percorso una distanza nella direzione y pari a

$$\Delta y_1 = \frac{1}{2} \frac{QE}{m} \frac{\ell^2}{v_0^2} = \frac{Q\ell^2 B^2}{2mE}.$$

Una volta fuori dal condensatore la traiettoria sarà rettilinea, quindi percorreranno un'ulteriore distanza

$$\Delta y_2 = L \frac{v_y}{v_x} = \frac{QB^2\ell L}{mE}.$$

La deflessione totale sarà $\Delta y = \Delta y_1 + \Delta y_2 = \frac{QB^2\ell(\frac{\ell}{2} + L)}{mE}$, da cui

$$\frac{Q}{m} = \frac{E\Delta y}{B^2\ell(\frac{\ell}{2} + L)}.$$

Risposta: $2,2194 \times 10^4 \text{ C/kg.}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 13 — PENDOLO-TRICKSHOT

Dal momento che non sono presenti attriti, l'energia si conserverà durante l'intero processo. Nel momento in cui la massa raggiunge la posizione più bassa (a corda verticale) si avrà

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mg\ell \implies v_0 = \sqrt{2g\ell}.$$

Questa sarà la velocità della massa anche subito dopo che la corda comincia ad avvolgersi attorno al chiodo, visto che su di essa non agiscono forze in direzione orizzontale. Indichiamo con θ l'angolo tra la porzione di corda (lunga r) in movimento attorno al chiodo e l'orizzontale, in modo che nel punto più basso si abbia $\theta = -\frac{\pi}{2}$. Dalla conservazione dell'energia,

$$\frac{1}{2}mv^2(\theta) + mgr \sin \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgr \implies v(\theta) = \sqrt{2g[\ell - r(1 + \sin \theta)]}.$$

Finché la corda è tesa, la forza centripeta sarà data dalla somma della tensione e della componente radiale della forza peso:

$$T + mg \sin \theta = \frac{mv^2}{r} \implies T = mg \left(\frac{2\ell}{r} - 2 - 3 \sin \theta \right).$$

La massa esce dalla traiettoria circolare quando $T = 0$, ovvero quando si trova all'angolo θ_1 tale che

$$\sin \theta_1 = \frac{2}{3} \left(\frac{\ell}{r} - 1 \right).$$

Notiamo che la velocità della massa all'istante del distacco è ortogonale alla corda e vale in modulo $v_1 = v(\theta_1) = \sqrt{\frac{2}{3}g(\ell - r)}$. Fino all'impatto con il chiodo, dal momento che l'unica forza agente sulla massa è la forza peso, il moto sarà parabolico. Detto t il tempo trascorso tra il distacco e l'istante dell'impatto, si dovrà avere

$$\begin{cases} v_1 t \sin \theta_1 = r \cos \theta_1 \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_1 \cos \theta_1 t = -r \sin \theta_1 \end{cases}$$

Notando che $v_1^2 = gr \sin \theta_1$ e risolvendo il sistema per $\sin \theta_1$, si arriva con qualche calcolo a

$$\sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\ell}{r} - 1 \right) \implies \frac{r}{\ell} = 4 - 2\sqrt{3}.$$

Risposta: $\boxed{5,3590 \times 10^{-1}}$. Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 14 — QUANDO LA PALLINA STA IN ALTO?

Scriviamo l'energia potenziale della pallina legata al perno. Sia θ l'angolo tra il filo e la verticale, in modo che nel punto più alto sia caratterizzato da $\theta = 0$. L'energia potenziale gravitazionale rispetto al livello del punto più alto è

$$U_g = -mg\ell(1 - \cos \theta).$$

L'energia potenziale elettrostatica è data da

$$U_e = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} (h^2 + \ell^2 + 2h\ell \cos \theta)^{-1/2}.$$

Usando le approssimazioni notevoli (valide per $|x| \ll 1$) $\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ e $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, si ha:

$$U_g \approx -\frac{1}{2}mg\theta^2$$

$$U_e \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{h+\ell} \left(1 - \frac{h\ell}{(h+\ell)^2} \theta^2 \right)^{-1/2} \approx \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{h+\ell} + \frac{h\ell}{2(h+\ell)^3} \theta^2 \right).$$

Dunque, a meno di una costante irrilevante, si ha

$$U(\theta) \approx \frac{1}{2} \theta^2 \left(-mg\ell + \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{h\ell}{(h+\ell)^3} \right).$$

L'equilibrio è stabile finché il termine tra parentesi è positivo, dunque il valore più grande possibile della massa è

$$m = \frac{1}{g} \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{(h+\ell)^3}.$$

Risposta: $\boxed{6,7887 \times 10^1 \text{ g}}$. Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 15 — UN LUNGO SCIVOLO

Scrivendo in componenti la Seconda Legge di Newton, si ricava che la forza normale N esercitata dal piano sulla massa è:

$$N = mg \cos \theta,$$

e quindi che l'accelerazione della massa parallela al piano vale:

$$a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta).$$

Essendo il moto uniformemente accelerato, il tempo necessario per percorrere una distanza $d = \frac{\ell}{\cos \theta}$ è:

$$T = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2\ell}{g \cos \theta (\sin \theta - \mu \cos \theta)}}.$$

Ora è chiaro che per minimizzare T come funzione di θ bisogna massimizzare:

$$f(\theta) = \cos \theta \sin \theta - \mu \cos^2 \theta.$$

Potremmo trovare il massimo derivando questa funzione, o tramite la formula trigonometrica di duplicazione di seno e coseno:

$$f(\theta) = \frac{1}{2} [\sin 2\theta - \mu(1 + \cos 2\theta)].$$

Tramite l'identificazione $\alpha = 2\theta$ massimizzare $f(\theta)$ equivale a massimizzare:

$$g(\alpha) = \sin \alpha - \mu \cos \alpha$$

Scrivendo allora $\mu = \tan \phi$:

$$g(\alpha) = \frac{\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi},$$

ovvero g è massima quando $\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$. Dunque:

$$\theta = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \mu}{2}.$$

Di conseguenza, $\max g = \frac{1}{\cos \phi} = \sqrt{1 + \mu^2}$, e $\max f = \frac{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu}{2}$, da cui concludiamo:

$$T = 2 \sqrt{\frac{\ell}{g(\sqrt{1 + \mu^2} - \mu)}}.$$

Risposta: $8,1239 \times 10^{-1}$ s. Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 16 — DRITTO AL PUNTO

Sia n il numero di moli di gas in questione, e siano V_0 e p_0 i valori iniziali di volume e pressione. Poiché il processo appare come un segmento, esso può essere descritto da un'espressione della forma

$$V(p) = a + bp,$$

dove a e b sono dei coefficienti da determinare. Imponendo le condizioni iniziale e finale, ossia

$$V(p_0) = V_0, \quad V(7p_0) = \frac{V_0}{7},$$

si ricavano a e b e si ottiene l'espressione

$$V(p) = V_0 \left(\frac{8p_0 - p}{7p_0} \right).$$

Dalla Prima Legge della Termodinamica si ottiene

$$\delta Q = dU + pdV,$$

da cui, sfruttando la legge di stato dei gas perfetti $pV = nRT$ e l'espressione dell'energia interna per un gas monoatomico ($U = \frac{3nRT}{2}$), si arriva a

$$\delta Q = \frac{3Vdp + 5pdV}{2} = \frac{8V_0(3p_0 - p)dp}{7p_0}.$$

Da questa espressione, deduciamo che il cambio di segno nel calore scambiato avviene quando $p = 3p_0$. Il rapporto cercato vale dunque

$$x = \frac{3p_0 - p_0}{7p_0 - p_0} = \frac{1}{3}.$$

Risposta: $\boxed{3,3333 \times 10^{-1}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 17 — DENTRO L'HULA-HOOP

Possiamo ricondurre il problema a due moti separati: quello del centro di massa, e quello della posizione relativa dei due corpi. Per la conservazione dell'impulso, il centro di massa deve muoversi con velocità costante

$$V = \frac{M}{m + M} v_0.$$

La posizione relativa invece descrive un moto circolare uniforme, di raggio

$$R = \frac{\ell}{2\pi}$$

e velocità tangenziale v_0 . La velocità angolare del moto è allora

$$\omega = \frac{v_0}{\ell} 2\pi = \frac{0,75 \text{ m/s}}{1,5 \text{ m}} 2\pi = \pi \frac{1}{1 \text{ s}}.$$

Dunque, dopo un secondo la particella avrà invertito la direzione del proprio moto rispetto all'anello. Passando di nuovo al moto dei singoli oggetti, detta v_r la velocità relativa, la velocità della particella è data da

$$v_p = V + \frac{\mu}{M} v_r, \quad \mu = \frac{mM}{m + M}.$$

Dopo un secondo, avendo la particella invertito il moto rispetto all'anello, avremo $v_r = -v_0$, e dunque

$$v_f = \frac{M}{M + m} v_0 - \frac{m}{M + m} v_0 = \frac{M - m}{M + m} v_0$$

Risposta: $\boxed{1,8750 \times 10^{-1} \text{ m/s}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 18 — ATTRITO MAGNETICO

Dopo un tempo molto grande il moto avverrà in condizioni stazionarie e la somma delle forze sulla particella sarà nulla. Indichiamo con \hat{n} il versore normale al piano uscente, in modo che $\vec{B} = B_0 \hat{n}$. Sia \hat{v} il versore parallelo alla velocità e $\hat{\tau} = \hat{n} \times \hat{v}$ il versore ortogonale ad entrambi. Infine sia \hat{z} il versore verticale, di modo che $\vec{g} = -g\hat{z}$. Gli assi paralleli a \hat{n} , \hat{v} , $\hat{\tau}$ formano una terna cartesiana ortogonale.

Scriviamo la risultante delle forze sulla particella:

$$\vec{0} = -\mu N \hat{v} - mg \hat{z} + N \hat{n} - Qv B_0 \hat{\tau}.$$

Proiettando su \hat{n} , si ha

$$N = mg(\hat{n} \cdot \hat{z}) = mg \cos \alpha.$$

Sfruttando l'identità vettoriale $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, possiamo scrivere:

$$\mu mg \cos \alpha \hat{v} + Qv B_0 \hat{\tau} = mg [\hat{n}(\hat{n} \cdot \hat{z}) - \hat{z}] = mg \hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{z}) = mg \vec{A},$$

dove $\vec{A} = \hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{z})$. Si vede facilmente che

$$|\vec{A}|^2 = |\hat{n} \times \hat{z}|^2 = \sin^2 \alpha.$$

D'altro canto, \vec{A} giacerà nel piano ortogonale ad \hat{n} , dunque

$$|\vec{A}|^2 = (\vec{A} \cdot \hat{\tau})^2 + (\vec{A} \cdot \hat{v})^2 = \mu^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{QB_0}{mg}\right)^2 v^2 = \mu^2 \cos^2 \alpha + \eta^2.$$

Dunque, visto che $\eta > 0$ per ipotesi, possiamo concludere che:

$$\eta = \sqrt{\sin^2 \alpha - \mu^2 \cos^2 \alpha}.$$

Risposta: $4,2426 \times 10^{-1}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 19 — OSCILLAZIONI FOTONICHE

Sia θ l'angolo che il lato piatto del semicerchio di base forma con la verticale, e sia α l'angolo che la luce uscente dal prisma forma con la normale alla superficie piatta del prisma. Dalla legge di Snell, si ha

$$n \sin \theta = \sin \alpha,$$

che, nel regime di piccole oscillazioni, può essere approssimata a

$$n\theta \approx \alpha$$

in quanto $\theta = 0$ è la posizione di equilibrio del prisma. Poiché l'unica massa non trascurabile presente nel sistema è m , posta a distanza a dall'asse di rotazione del prisma, e poiché tale asse è orizzontale, si ha che il prisma oscilla attorno alla posizione di equilibrio con pulsazione data (nel regime di piccole oscillazioni) da

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{a}},$$

perciò la massima velocità angolare $\dot{\theta}$ raggiunta dal prisma, in corrispondenza di un'ampiezza iniziale θ_0 , vale circa

$$\dot{\theta}_{\max} = \sqrt{\frac{g}{a}} \theta_0$$

e si ottiene quando $\theta = 0$. Infine, dalla geometria del sistema, si deduce che lo spostamento verticale del puntino luminoso sul muro vale

$$y = L \tan(\theta - \alpha) \approx L \tan((1 - n)\theta),$$

da cui, quindi,

$$\dot{y} = L \frac{\dot{\theta}(1 - n)}{\cos^2(\theta(1 - n))}.$$

Di conseguenza, la massima velocità cercata è

$$v = |\dot{y}|_{\max} = L(n - 1)\theta_0 \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Risposta: 1.2221 m/s. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 20 — OBIETTIVO ORBITA! —————

Detti R , M il raggio e la massa della Terra, vale $\frac{GM}{R} < v^2 < \frac{2GM}{R}$, quindi fino all'accensione dei propulsori la traiettoria sarà effettivamente un'ellisse il cui perigeo coincide con il punto di partenza della navicella. Sia a il semiasse maggiore: l'energia totale vale

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a} \implies 2a = \frac{R}{1 - \frac{Rv^2}{2GM}}.$$

La distanza della navicella dal centro della Terra all'apogeo sarà

$$r = 2a - R = \frac{R}{\frac{2GM}{Rv^2} - 1}.$$

Sia u la velocità della navicella all'apogeo, subito prima dell'accensione dei motori. La conservazione del momento angolare implica

$$vR = ur \implies u = \frac{2GM}{Rv} - v.$$

La velocità necessaria per percorrere un'orbita circolare di raggio r è $v' = \sqrt{\frac{GM}{r}}$, dunque possiamo concludere:

$$\Delta v = v' - u = \sqrt{2 \left(\frac{GM}{Rv} \right)^2 - \frac{GM}{R}} + v - \frac{2GM}{Rv}.$$

Risposta: 1,4520 × 10³ m/s. *Errore massimo consentito:* 0.5%.