Problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

26 novembre 2025

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono una delle sfide che vi separano dalla possibilità di partecipare allo stage 2026. **Leggete attentamente questa introduzione**: vi sarà utile per un approccio corretto al test.

Avete a disposizione molti giorni per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare/studiare gli argomenti che non conoscete bene: il test serve anche a questo. Sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi, dato che non favorisce l'approccio ad argomenti nuovi in maniera autonoma, né a noi per selezionarvi in modo appropriato, senza contare che c'è anche una prova orale...

Per svolgere i problemi è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica e di materiale da disegno, oltre al supporto necessario per produrre effettivamente l'elaborato. Non sono consentiti ulteriori strumenti di calcolo.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolverli tutti: potrebbe succedere che alcuni dei problemi più difficili possano risultare facili e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file `pdf` con tutte le vostre soluzioni. Potete scriverlo come preferite: LaTeX, Word, fotografando manoscritti... L'importante è che sia perfettamente leggibile. Non potremmo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere! La dimensione massima del file unico da caricare sul sito è di 30 Megabyte.

Nel file consegnato, le soluzioni devono essere riportate nello stesso ordine dei corrispondenti problemi e deve essere chiaro a quale quesito si riferiscono!

È necessario spiegare tutti i passaggi svolti, anche parziali, e non riportare solo i risultati finali. Una risposta non giustificata, per quanto corretta, otterrà un punteggio parziale o nullo.

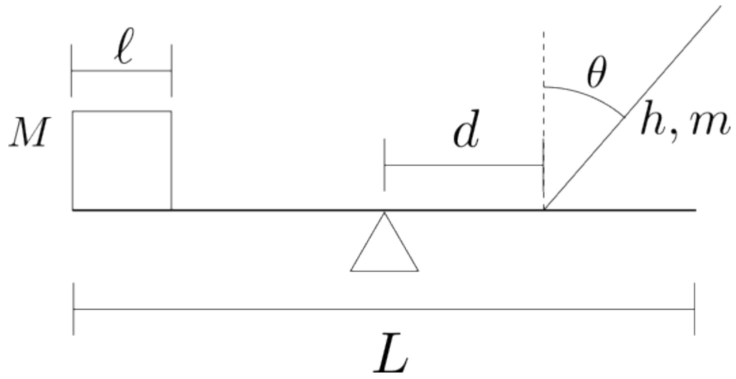
È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere alcuni problemi per intero: in questo caso verranno assegnati punteggi parziali. Inoltre, vi facciamo notare che, per alcuni problemi, è possibile rispondere a qualche richiesta anche senza aver svolto i punti precedenti.

Per eventuali domande rivolgetevi solamente all'indirizzo email segreteria.stagefisica@sns.it. Eventuali correzioni sul testo possono essere annunciate sul sito ufficiale dello stage stagefisica.sns.it.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario, ma non sufficiente, per poter fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

*segreteria.stagefisica@sns.it

PROB. 1 — Michael Jackson - 60 pt.



Come è ben noto, il Re del Pop possiede un'incredibile capacità di inclinarsi in avanti senza cadere. Nel suo ultimo numero, è riuscito a mantenere l'equilibrio stando in piedi su un'asta orizzontale, usando una cassa stereo come contrappeso, come in figura. L'asta è rigida e omogenea, di lunghezza $L = 20\,\mathrm{m}$, ed è appoggiata su un perno nel suo punto medio. L'estremo sinistro della cassa, che ha la forma di un cubo di lato $\ell = 1\,\mathrm{m}$ e massa $M = 37\,\mathrm{kg}$, coincide con l'estremo sinistro dell'asta.
Il tallone di Michael Jackson si trova invece a una distanza $d = 5\,\mathrm{m}$ dal perno. Il Re ha altezza $h = 1{,}75\,\mathrm{m}$ e massa $m = 62\,\mathrm{kg}$.

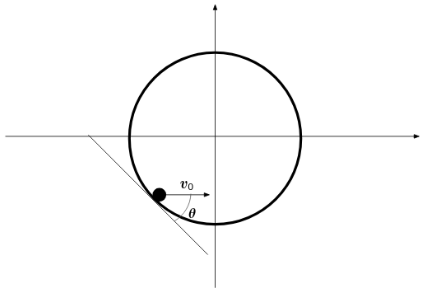
1. Approssimando M. J. come un'asta rigida e omogenea, di quale angolo dovrebbe inclinarsi rispetto alla verticale per stare in equilibrio? In che direzione?
2. Uno spettatore sospetta che il Re riesca a non cadere solo grazie a qualche sotterfugio. Quanto dovrebbero essere lunghi i suoi piedi per consentirgli di rimanere in equilibrio senza nessun sostegno esterno?

PROB. 2 — Bagni termici consecutivi - 70 pt.

Si consideri un sistema termodinamico chiuso e isolato.

1. Inizialmente, nel sistema sono presenti due bagni termici ideali con temperature T_0 e T_1, dove $T_0 < T_1$. Una macchina di Carnot lavora tra i due bagni, convertendo parte del calore estratto da quello a temperatura T_1 in lavoro, mentre la restante parte è ceduta al bagno a temperatura T_0. Quanto vale il rendimento della macchina termina?
2. Si aggiunga ora un terzo bagno termico ideale a temperatura $T_2 > T_1$ e una macchina di Carnot che lavora tra T_1 e T_2. Le due macchine lavorano in modo tale che, in ogni ciclo, il calore complessivamente scambiato dal bagno termico a temperatura intermedia T_1 sia nullo. Quanto vale il rendimento complessivo?
3. Si aggiungano altri bagni termici ideali al sistema di sopra fino ad averne n, le cui temperature risultano essere $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$. Tra due bagni termici consecutivi è sempre presente una macchina di Carnot, e le macchine lavorano in modo tale che solo le due sorgenti a temperatura più alta e più bassa scambino complessivamente calore non nullo in un ciclo. Qual è il rendimento del sistema?

PROB. 3 — COLLISIONI GEOMETRICHE - 85 PT.



Si consideri un piano infinito senza attrito, su cui sono presenti due oggetti. Il primo è approssimabile a un punto materiale di massa m_1, mentre il secondo è un anello di raggio R e massa m_2, uniformemente distribuita lungo la circonferenza. Il punto materiale viene inizialmente posizionato all'interno dell'anello in modo che ne tocchi il bordo come mostrato in figura, e abbia velocità iniziale v_0, orientata a $\theta = \frac{\pi}{4}$ rispetto alla tangente alla circonferenza. Si assuma che tutti gli urti siano elastici e che non ci sia attrito tra i due oggetti.

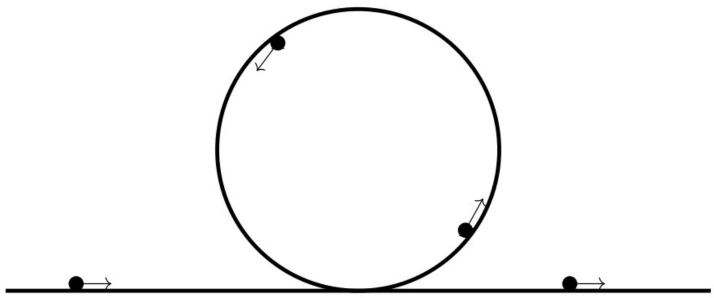
1. Si descriva il moto dei due oggetti, trovando le leggi orarie di entrambi.

2. Se al posto del punto materiale si considerasse un disco circolare di raggio $r < R$ e massa m_1, uniformemente distribuita, e nelle stesse condizioni iniziali, come cambierebbero le leggi orarie dei due corpi? (Nota: in caso di similitudini, **se ben giustificate**, non è necessario riportare tutti i calcoli)

Si lasci ora variare l'angolo iniziale θ nell'intervallo $0 < \theta < \pi$.

3. Per quali valori di θ il sistema torna esattamente nella configurazione iniziale, dopo aver fatto trascorrere abbastanza tempo? Fissato l'angolo, quanti urti si verificano prima che ciò accada?

PROB. 4 — LOOP SU GUIDA MOBILE - 90 PT.



Un punto materiale di massa m si sta muovendo su un piano orizzontale liscio, in moto rettilineo uniforme a velocità v_0. Il punto è diretto verso una guida circolare di raggio R e massa M, inizialmente ferma, con l'asse parallelo al piano, come in figura. La guida è libera di muoversi traslare sul piano, ma è vincolata a non staccarsi mai da esso e a non rotolare. Non sono presenti attriti di alcun tipo tra nessuna coppia di oggetti.
(Nota: nei punti 1 e 2 si può assumere che la tesi del punto 3 sia vera, senza dimostrarla)

1. Nel caso in cui $m \ll M$, trovare la condizione su v_0 e R affinché il punto materiale riesca a compiere un giro completo senza staccarsi mai dalla guida.

2. Trovare, nel caso più generale, la condizione su v_0, R, m e M affinché il punto materiale riesca a compiere un giro completo senza staccarsi mai dalla guida.

3. Dimostrare che, affinché il punto materiale riesca a fare un giro completo all'interno della guida, è sufficiente che non se ne distacchi quando si trova nel punto più alto.

PROB. 5 — IL PIANETA DA SALVARE - 95 PT.

Fabrizio è un abitante del pianeta *Patrizio*, il quale orbita attorno a una stella S, di massa M_S, lungo una traiettoria ellittica. Il pianeta ha massa M e, quando si trova al perielio della sua orbita, possiede velocità v e dista dalla stella una quantità R. Dalla sua navicella spaziale, Fabrizio nota però un grave problema: una nube di polveri sta per incrociare la traiettoria del pianeta e rischia di interferire con la sua orbita. Assumiamo che il campo gravitazionale generato dalla nube sia sempre trascurabile. Per mettere in salvo Patrizio, è necessario inclinare il piano orbitale di un angolo $\theta \geq \frac{\pi}{3}$ in modo da garantire che l'orbita modificata eviti la regione occupata dalla nube. Fabrizio, previdente e abile, inizia ad agire con largo anticipo, così che qualunque soluzione da lui escogitata possa essere realizzata prima dell'eventuale collisione.

1. Come prima possibilità, Fabrizio valuta di lanciare un sasso di massa m (la cui interazione gravitazionale con il pianeta è sempre trascurabile) dalla sua navicella spaziale su un'orbita parabolica attorno alla stella S, giacente in un piano perpendicolare al piano dell'orbita del pianeta. Supponi che il sasso venga lanciato in modo che il perielio della sua orbita disti r dalla stella e che, quando si trova in quel punto, esso urti in maniera totalmente anelastica il pianeta. Di quale angolo α si inclina il piano della nuova orbita del corpo (pianeta + sasso) rispetto al piano dell'orbita iniziale di Patrizio?

2. Fabrizio non è soddisfatto di una deflessione così piccola. Pensa allora a un'altra soluzione, che utilizza molti sassi di massa intermedia. Esplora quindi la possibilità di lanciare questi sassi tutti con lo stesso momento angolare $\vec{L}$, tutti nello stesso piano dell'orbita del sasso del punto 1 e in modo che ciascuno colpisca il pianeta. Li lancia però in diversi step: lancia il primo sasso, lascia che la nuova orbita si stabilizzi dopo l'urto, attende il momento opportuno e poi lancia il secondo, e così via anche per i successivi. Quanti sassi sono necessari per salvare Patrizio, in funzione di M, v, R e L?

3. Un numero così elevato di sassi risulterebbe poco pratico per Fabrizio, che decide finalmente di smettere di fare troppi calcoli e di passare all'azione. Sceglie nuovamente di lanciare molti sassolini, tutti con lo stesso modulo del momento angolare $L' \ll L_0$ (dove L_0 è il momento angolare del pianeta nella sua orbita iniziale). Come prima, li lancia uno alla volta, in step successivi, in modo che ognuno colpisca il pianeta in modo totalmente anelastico. Questa volta, però, impone che il piano dell'orbita del $(k+1)$-esimo sasso sia ortogonale al piano sul quale il pianeta orbita tra il k-esimo urto e il successivo. Inoltre, tutti i vettori momento angolare dei sassi appena lanciati giacciono in uno stesso piano. Qual è il numero minimo di sassolini che Fabrizio dovrà lanciare ora per inclinare il piano dell'orbita dell'angolo necessario?

PROB. 6 — POLVERE INTERSTELLARE - 90 PT.

Un granello di polvere interstellare a forma di cubo, inizialmente fermo, viene colpito da un fascio di fotoni uguali e provenienti da una stella molto lontana. Tutti i fotoni incidono perpendicolarmente, e nello stesso istante, una delle sei facce del granello e vengono riflessi totalmente.

1. Sapendo che la massa del granello è $6{,}67 \times 10^{-10}\,\mathrm{kg}$, il fascio è composto da $0{,}01\,\mathrm{mol}$ di fotoni, la lunghezza d'onda dei fotoni prima dell'urto con il granello era di $1 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$, calcola la velocità del granello di sabbia dopo l'urto, nel sistema di riferimento in cui il granello era inizialmente fermo.

2. Nello stesso sistema di rifermento, una sonda dotata di spettrometro viaggia a velocità $v = \frac{c}{2}$, perpendicolarmente alla direzione dei fotoni. Essa riesce a intercettare i fotoni che sono stati riflessi: quanto vale la lunghezza d'onda che essa misura?

PROB. 7 — RESISTENZA IN CAMPO MAGNETICO - 110 PT.

Un materiale conduttore non ideale riempie una certa regione dello spazio ed è permeato da un campo elettrico costante ed omogeneo $\vec{E} = E\hat{x}$, mantenuto dall'esterno. Il materiale può essere modellizzato come un mare di elettroni, ciascuno di carica $-e$, su ognuno dei quali agisce la forza

$$\vec{F} = -e\vec{E} - \alpha\vec{v},$$

dove $\vec{v}$ è la velocità del singolo elettrone e α è una costante positiva.

1. Si esprima la resistività del conduttore in questione in termini di α, della densità volumica di elettroni n presenti nel materiale, e di eventuali altre costanti fisiche.

2. Viene aggiunto un campo magnetico costante ed omogeneo $\vec{B} = B\hat{z}$, sempre mantenuto dall'esterno. Si determini l'angolo tra il vettore densità di corrente $\vec{J}$ e l'asse delle x in condizioni stazionarie. Si trovi anche il modulo della componente J_x di $\vec{J}$.

3. Adesso cambiamo scenario. Consideriamo un resistore, fatto dello stesso materiale conduttore di prima, a forma di parallelepipedo, con lati $\ell \gg a \gg b$. Il resistore è disposto in maniera tale che gli spigoli di lunghezza ℓ siano paralleli all'asse x, quelli di lunghezza a siano paralleli all'asse z, e quelli di lunghezza b paralleli all'asse y. Il campo magnetico costante e uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ è ancora presente, mentre il campo elettrico esterno è stato rimosso. Inoltre, le facce corrispondenti a $x = 0$ ed $x = \ell$ sono attaccate rispettivamente ai poli positivo e negativo di un generatore di tensione ideale, a formare un circuito chiuso. Sia ΔV la differenza di potenziale ai capi del generatore. Determinare la resistenza equivalente del circuito dopo molto tempo dall'accensione del generatore, in funzione di B, delle dimensioni del parallelepipedo e delle costanti che caratterizzano il materiale. Determinare, inoltre, la densità di carica e la densità di corrente dentro il resistore.

4. Nelle condizioni (stazionarie) del punto precedente, quanto vale l'energia potenziale elettrostatica relativa alle interazioni fra le cariche presenti nel materiale?

PROB. 8 — CONTENITORE CILINDRICO A MOLLO - 115 PT.

Si consideri una vasca molto grande, completamente riempita d'acqua, all'interno della quale galleggia un contenitore cilindrico inizialmente vuoto. L'altezza del contenitore è $H = 50\,\text{cm}$, mentre il raggio di base è $R' = 40\,\text{cm}$. Il contenitore è chiuso superiormente da un coperchio di spessore trascurabile, dotato al centro di un foro circolare di raggio $R = 0{,}4\,\text{cm}$. Sia il contenitore che il coperchio hanno massa trascurabile. Al di sopra del foro, a un'altezza $H' = 5\,\text{m}$ rispetto al livello dell'acqua nella vasca, è posto un rubinetto di raggio interno $r = 0{,}73\,\text{cm}$, dal quale l'acqua esce con velocità $v_0 = 3\,\text{m/s}$ verso il basso. Un meccanismo ignoto esercita sul contenitore una forza diretta verso l'alto, di modulo uguale alla quantità di moto che l'acqua in caduta trasferisce al contenitore nell'unità di tempo. Il riempimento è sufficientemente lento da poter considerare il contenitore, in ogni istante, nella sua posizione di equilibrio idrostatico.

Si assuma che il coperchio sia leggermente inclinato in modo tale che l'acqua che non entra nel foro scivoli verso l'esterno, e che durante tutto il processo il contenitore rimanga sempre verticale. Si trascuri qualsiasi effetto dovuto alla viscosità dell'acqua e alla turbolenza in prossimità del foro. Inoltre, si approssimi il tempo impiegato da una goccia d'acqua per passare dal rubinetto alla superficie dell'acqua all'interno del contenitore con il tempo impiegato dell'acqua per passare dal rubinetto al foro sul coperchio.

Ponendo $t = 0$ l'istante in cui l'acqua che cade dal rubinetto raggiunge per la prima volta il fondo del contenitore, determinare il tempo necessario affinché il contenitore si riempia completamente. Inoltre, fornire una giustificazione dell'approssimazione sui tempi citata alla fine del paragrafo precedente.

PROB. 9 — GAS IN UNA SCATOLA - 140 PT. –

Una scatola chiusa, a forma di parallelepipedo rettangolo e di massa M, è posta nel vuoto in assenza di gravità. Al suo interno è contenuto un gas perfetto, di massa molare μ e massa complessiva m. Inizialmente la scatola si muove con velocità $\vec{v}_0$, diretta perpendicolarmente a due delle sue facce, di area S; gli spigoli paralleli a $\vec{v}_0$ hanno lunghezza L. Successivamente, una forza esterna costante $\vec{F}$, diretta in modo opposto a $\vec{v}_0$, inizia a frenare la scatola, e cessa di agire nel momento in cui la velocità si azzera. Si assuma che la scatola venga mantenuta a temperatura costante T, e che il tempo caratteristico di termalizzazione τ del gas al suo interno sia molto minore della durata dell'azione della forza, così che il gas possa essere approssimato come sempre in equilibrio termodinamico (i transienti che caratterizzano i gli intervalli iniziali e finali in cui la forza viene attivata e disattivata sono trascurabilmente brevi).

1. Indichiamo con x la distanza dalla faccia posteriore della scatola lungo la direzione del moto, così che all'interno risulti $0 \le x \le L$. Si osserva che, trascurando i transienti iniziale e finale, la pressione del gas dipende unicamente dalla coordinata x ed è indipendente dal tempo. Giustificare l'indipendenza dal tempo della pressione e determinare la funzione $p(x)$ durante la frenata.

2. Determinare lo spostamento del centro della scatola dal momento in cui la forza inizia ad agire fino a quello in cui il sistema raggiunge l'equilibrio finale. Si può assumere che $v \ll \frac{\lambda}{\tau}$, dove λ è il libero cammino medio delle particelle nel gas.

PROB. 10 — Infiniti pistoni - 145 pt. ——

1. Si consideri un cilindro con pareti isolanti, chiuso alle estremità, di area di base S e altezza $3L$. Esso è diviso in tre sezioni da due pistoni molto sottili e di massa m, liberi di scorrere senza attrito parallelamente al suo asse. Il cilindro è disposto con il suo asse parallelo a $\vec{g}$. Inizialmente i pistoni sono rivestiti da un sottile strato di materiale termicamente isolante, di spessore e massa trascurabili. Il sistema si trova in equilibrio meccanico: i pistoni suddividono il cilindro in tre sezioni identiche e in ognuna di esse sono contenute n moli di gas perfetto monoatomico; in tale stato la temperatura nella sezione superiore vale T_0. Successivamente il pistone superiore viene bloccato nella posizione iniziale e lo strato isolante che ricopriva i pistoni viene fatto dissolvere. Il calore può quindi fluire liberamente attraverso i pistoni e, dopo un certo tempo, il sistema raggiunge un nuovo equilibrio termodinamico. Trovare la temperatura T_1 del gas in questo stato finale, assumendo che $nRT_1, nRT_0 \gg mgL$ e che gli effetti della gravità sul gas siano trascurabili.

2. Si consideri ora un cilindro identico al precedente ma di altezza L, suddiviso in N sezioni da $N-1$ pistoni sottili di massa $\frac{m}{N-1}$, liberi di scorrere senza attrito parallelamente al suo asse. Inizialmente i pistoni sono disposti in modo tale che tutte le sezioni abbiano lo stesso volume. Il sistema è in equilibrio meccanico, i pistoni sono ricoperti da un sottile strato isolante e in ciascuna sezione sono contenute $\frac{n}{N}$ moli di gas perfetto monoatomico; in questo stato la temperatura nella sezione più in alto vale T_0. Lo strato isolante viene quindi rimosso, il calore può fluire tra le diverse sezioni e, dopo molto tempo, il sistema raggiunge nuovamente l'equilibrio termodinamico. Nel limite $N \to \infty$ e sotto le stesse ipotesi del punto precedente, determinare la temperatura T_1 del gas in questo stato finale.

Nota: può essere utile la seguente espansione notevole: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$, valida se $|\alpha x| \ll 1$.