

Soluzioni ai problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

27 novembre 2024

PROB. 1 — TRE SBARRE E UNA MOLLA

Proponiamo dapprima una soluzione energetica. Sia h la distanza tra la guida e la sbarra centrale. Si noti che h è necessariamente compreso tra 0 e l . Si può scrivere l'energia della configurazione come somma dell'energia potenziale della molla,

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}kh^2,$$

e dell'energia potenziale gravitazionale delle tre sbarre rispetto alla guida,

$$U_g = -\frac{1}{2}mgh - \frac{1}{2}mgh - mgh.$$

Otteniamo quindi che l'energia è

$$U = U_{\text{el}} + U_g = \frac{1}{2}kh^2 - 2mgh.$$

Questa è minima quando la sua derivata è nulla, ossia quando $h = \frac{2mg}{k} = \frac{l}{2}$, che dunque è la distanza di equilibrio.

Una soluzione alternativa si ottiene considerando le forze in gioco. Si fissi un riferimento cartesiano con l'asse y rivolto verso l'alto e l'asse x verso destra. Sia θ l'angolo acuto tra le sbarre laterali e la guida. Le forze che agiscono sulla sbarra centrale lungo l'asse y sono una forza peso $-mg$, una forza kh data in direzione opposta dalla molla e le componenti verticali di due forze simmetriche di modulo N date dalle due sbarre laterali, che saranno entrambe N_y . Sull'asse x si avranno due componenti orizzontali N_x e $-N_x$ che si cancellano. Quindi per l'equilibrio delle forze sulla sbarra centrale si ha $kh = mg - 2N_y$.

Si considerino ora le forze su una delle due sbarre laterali, per esempio quella a sinistra. La forza data dalla guida è diretta lungo l'asse y , e quindi se si considerano le forze dirette lungo l'asse x si ha solamente la forza data dalla sbarra centrale sulla sbarra laterale, che per il terzo principio è $-N_x$. Poiché la situazione è di equilibrio, la componente orizzontale della forza N è quindi nulla. Per ricavare ora la componente verticale della forza N (che nella nostra notazione per il terzo principio è $-N_y$) si possono calcolare i momenti delle forze sulla sbarra laterale rispetto al punto dove la sbarra tocca la guida. Il momento dato dalla forza peso è

$$\frac{mgl \sin \theta}{2},$$

il momento dato dalla forza della guida è nullo, il momento dato dalla forza della sbarra centrale (ricordando che $-N_y = -N$ perché $-N_x = 0$) è $Nl \sin \theta$. Imponendo che la somma sia nulla si ha

$$-N = -N_y = -\frac{mg}{2}.$$

Sostituendo nella relazione per l'equilibrio delle forze il valore ottenuto di N_y si ottiene

$kh = 2mg$, da cui

$$h = \frac{2mg}{k} = \frac{l}{2},$$

esattamente come prima. In questo modo si ricava anche che i moduli delle forze esercitate dalle sbarre laterali sono $\frac{mg}{2}$ e che entrambe le forze sono dirette verso il basso.

PROB. 2 — RAGGIO DI LUCE IN UN FLUIDO —

1. La legge di Snell ci fornisce una relazione tra gli angoli formati dai raggi con la normale all'interfaccia nei due mezzi. In particolare vale:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2).$$

Allora, detti $n_1, n_2, \theta_1, \theta_2$ rispettivamente gli indici di rifrazione e gli angoli che il raggio forma con la verticale nei due mezzi possiamo scrivere il sistema:

$$\begin{cases} n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \\ n_2 \sin(\theta_2) = n_a \sin(\theta_a) \end{cases}$$

dove $n_a \approx 1$ e θ_a sono rispettivamente l'indice di rifrazione dell'aria e l'angolo che il raggio forma con la verticale una volta uscito dalla vasca. A questo punto è facile notare che si ha

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) = n_a \sin(\theta_a) \Rightarrow n_1 \sin(\theta_1) = n_a \sin(\theta_a),$$

da cui troviamo

$$\theta_a = \arcsin(n_1 \sin(\phi)),$$

essendo $\theta_1 = \phi$ per definizione.

2. Se si aggiunge uno strato possiamo aggiungere una quarta equazione al sistema e accorgerci che non cambia nulla nel procedimento risolutivo:

$$\begin{cases} n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \\ n_2 \sin(\theta_2) = n_3 \sin(\theta_3) \\ n_3 \sin(\theta_3) = n_a \sin(\theta_a) \end{cases}$$

Allora possiamo scrivere

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) = n_3 \sin(\theta_3) = n_a \sin(\theta_a) \Rightarrow n_1 \sin(\theta_1) = n_a \sin(\theta_a),$$

perciò la soluzione che troviamo è la stessa del punto precedente:

$$\theta_a = \arcsin(n_1 \sin(\phi)).$$

3. A questo punto è facile generalizzare il risultato ottenuto. Immaginando di scrivere il sistema con N equazioni per gli N strati, è facile notare che vale la relazione:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) = \dots = n_N \sin(\theta_N).$$

È quindi facile dimostrare che, nel caso di superfici di separazione parallele, la quantità $n \sin(\theta)$ è costante. Da queste osservazioni si nota che, ancora una volta,

$$\theta_a = \arcsin(n_1 \sin(\phi)).$$

4. Dal momento che ogni strato ha spessore h_i , possiamo calcolare lo spostamento orizzontale del raggio luminoso quando attraversa lo strato i -esimo come

$$d_i = h_i \tan(\theta_i) = h_i \tan\left(\arcsin\left(\frac{n_1}{n_i} \sin(\phi)\right)\right) = \frac{h_i}{\sqrt{\left(\frac{n_i}{n_1 \sin \phi}\right)^2 - 1}}.$$

Dunque si trova che la distanza d cercata è pari a:

$$d = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{\sqrt{\left(\frac{n_i}{n_1 \sin \phi}\right)^2 - 1}}.$$

PROB. 3 — FIONDA GRAVITAZIONALE —

1. La velocità cercata si trova ponendo uguale a zero l'energia meccanica totale dell'oggetto,

$$\frac{1}{2} m_a v_0^2 - \frac{GMm_a}{R} = 0,$$

da cui $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Infatti, a distanza infinita dal pianeta l'energia gravitazionale dell'oggetto si annulla, perciò, essendo l'energia cinetica non negativa, anche l'energia totale deve esserlo. Questa velocità è detta “velocità di fuga”, o “seconda velocità cosmica”.

2. Immaginiamo che l'oggetto, raggiunta la quota dell'orbita del satellite, abbia velocità nulla quando subisce l'effetto fionda. Ammettendo che il satellite abbia raggio nullo, la fionda gravitazionale si può interpretare molto semplicemente come un urto elastico tra il satellite e l'oggetto. Il satellite ha inizialmente velocità $v = \sqrt{\frac{GM}{d}}$ (detta “prima velocità cosmica”). Se ci poniamo nel sistema di riferimento solidale a esso (trascuriamo gli effetti dovuti al fatto che non è un sistema inerziale), allora l'astronave si avvicinerà al satellite con una

velocità di modulo uguale. Detta v'_a la velocità dell'oggetto dopo l'urto e v'_s quella del satellite, dalle equazioni della conservazione dell'energia e della quantità di moto risulta, nel caso ottimale di urto frontale,

$$m_a v = m_a v'_a + m v'_s, \quad \frac{m_a v^2}{2} = \frac{m_a v_a'^2}{2} + \frac{m v_s'^2}{2}$$

$$\Rightarrow v'_a = \frac{m_a - m}{m + m_a} v \approx -v,$$

Mentre quella del satellite rimane pressoché costante:

$$v'_s = \frac{2m_a}{m + m_a} v \approx 0.$$

Questo fa sì che l'oggetto acquisti grande quantità di moto e si muova ora rispetto al pianeta con una velocità pari al doppio della prima velocità cosmica v a quella distanza dal pianeta. Essa ha quindi una velocità maggiore della velocità di fuga calcolata alla distanza d dal pianeta, che vale $\sqrt{2}v$. Questo consente all'astronave di fuggire dalla gravità del pianeta con la sola velocità necessaria per raggiungere la quota del satellite senza velocità residua. Dalla conservazione dell'energia si ha quindi

$$\frac{1}{2} m_a v_1^2 - \frac{GMm_a}{R} = -\frac{GMm_a}{d},$$

perciò si trova

$$v_1 = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{d} \right)}.$$

Si noti che questa velocità è ottimale perché, per velocità iniziali inferiori, l'oggetto non raggiungerebbe la quota del satellite e non potrebbe dunque sfruttare l'effetto fionda.

Studiamo ora più nel dettaglio l'interazione tra oggetto e satellite. Per ottenere l'effetto fionda, l'oggetto descrive un'orbita iperbolica attorno al satellite. Proprio come in un urto elastico, l'energia in un'orbita si conserva. L'angolo tra i due asintoti 2θ è dato dalla relazione $\cos \theta = \frac{1}{e}$, dove e è l'eccentricità: vogliamo quindi calcolare a che valore tende l'eccentricità di un'orbita per la distanza dal satellite che tende a zero. L'eccentricità di un'orbita è data dalla formula

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{(Gm_1m_2)^2m_2}}.$$

Immaginiamo che l'astronave si avvicini al satellite con velocità v a una quota leggermente più bassa (o alta) dell'orbita del satellite. Detta h la distanza tra il vettore velocità e l'orbita del satellite, il momento angolare L è dato da $L = hmv$, e quindi, per $h \rightarrow 0$ (cioè ammettiamo che l'astronave si possa avvicinare al satellite indefinitamente senza mai schiantarsi sulla superficie), $L \rightarrow 0$ e allora $e \rightarrow 1$. Si ha quindi $\theta \rightarrow 0$: questo significa che, dopo la fionda, l'astronave si allontana dal satellite lungo la stessa semiretta da cui

proveniva e con velocità simmetrica rispetto a quella di avvicinamento, il che giustifica l'approssimazione di urto elastico (anche ammettendo che la distanza tra il satellite e l'astronave non sia nulla, ma sia finitamente piccola, visto il grande scarto tra la velocità di fuga $\sqrt{2}v$ e la velocità risultante dall'urto elastico $2v$, è ragionevole pensare che l'astronave ottenga una velocità, seppur minore di $2v$, comunque molto maggiore della velocità di fuga).

PROB. 4 — COEFFICIENTE DI ATTRITO VARIABILE

1. Si nota intanto che, una volta raggiunta la condizione di puro rotolamento, la forza di attrito statica non modifica il comportamento del sistema, perché non fa lavoro essendo il punto di applicazione istantaneamente fermo. Quindi basta che sia

$$v_0 > 0.$$

Potrebbe confondere il fatto che l'attrito serva per permettere il puro rotolamento in presenza di una forza esterna netta, ma in questo caso questo non è necessario non essendoci alcuna forza esterna netta (peso e normale si annullano).

2. Siano $v(t)$ e $\omega(t)$ rispettivamente la velocità del centro di massa e la velocità angolare della sfera (quest'ultima presa positiva quando la sfera ruota in senso orario guardandola dal lato dal quale si muove verso destra) in funzione del tempo. Finché si ha $v > R\omega$, il punto di contatto tra sfera e terreno striscia verso destra, quindi sulla sfera agisce una forza d'attrito di modulo $mgkx(t)$ rivolta verso sinistra. Detto $I = \frac{2mR^2}{5}$ il momento d'inerzia della sfera rispetto al proprio centro di massa, si hanno allora le due equazioni cardinali

$$m\dot{v} = -mgkx, \quad I\dot{\omega} = mgRkx.$$

Eliminando $mgkx$ dalle due equazioni si ottiene

$$mR\dot{v} = -I\dot{\omega},$$

che, integrata con le condizioni iniziali $\omega(0) = 0$ e $v(0) = v_0$, dà

$$mR(v_0 - v) = I\omega.$$

Perciò, quando si raggiunge il puro rotolamento con $v = \omega R$, la velocità vale

$$v_f = \frac{v_0}{1 + \frac{I}{mR^2}} = \frac{5v_0}{7}.$$

Tornando ora alla prima equazione, essendo $v = \dot{x}$ si ha

$$\ddot{x} = -gkx.$$

Si riconosce l'equazione dell'oscillatore armonico, che con le condizioni iniziali $x(0) = 0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ è risolta da

$$x(t) = \frac{v_0}{\sqrt{gk}} \sin(\sqrt{gkt}) \Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 \cos(\sqrt{gkt}).$$

Ricordiamo che queste leggi orarie valgono fintantoché $0 < x < \frac{1}{k}$ e il moto non è di puro rotolamento. Imponendo dunque che, quando $\dot{x} = v_f$, sia $0 < x < \frac{1}{k}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{gkt}) = \frac{5}{7} &\Rightarrow \sin(\sqrt{gkt}) = \frac{2\sqrt{6}}{7} \Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}v_0}{7\sqrt{kg}} < \frac{1}{k} \\ &\Rightarrow v_0 < \frac{7}{2} \sqrt{\frac{g}{6k}}. \end{aligned}$$

PROB. 5 — TERMODINAMICA ALL'ARIA APERTA

Innanzitutto, l'unica componente non adiabatica del sistema è il setto centrale, quindi la quantità di calore ricevuta da un gas è uguale a quella ceduta dall'altro. Inoltre, la differenza di temperatura dei due gas è sempre nulla, poiché il setto è un conduttore perfetto. Infine, la trasformazione del gas A è una isobara. Scriviamo la prima legge della termodinamica per un tempo infinitesimo per i due gas, indicando con n il numero di moli, uguale per ogni gas:

$$\frac{3}{2}nRdT_B = dQ_B - p_BdV_B,$$

$$\frac{3}{2}nRdT_A = dQ_A - p_BdV_A.$$

Sappiamo che $dQ_A = -dQ_B$ e che $dT_A = dT_B = dT$, quindi, sommandole, otteniamo

$$3nRdT = -P_A dV_A - P_B dV_B.$$

Sappiamo che

$$P_A = p_0 = \frac{nRT_0}{V_0}, \quad dV_A = \frac{nRdT}{p_0}, \quad P_B = \frac{nRT}{V_B},$$

quindi si può riscrivere l'equazione come

$$4\frac{dT}{T} = -\frac{dV_B}{V_B},$$

che, integrata, dà la relazione

$$V_B = V_0 \left(\frac{T_0}{T} \right)^4.$$

Otteniamo infine

$$\frac{\tau_A}{\tau_B} = \frac{\frac{dV_A}{dt}}{\frac{dV_B}{dt}} = \frac{dV_A}{dV_B} = \frac{\frac{nRdT}{p_0}}{-\frac{4V_B dT}{T}} = -\frac{nRT}{4V_B p_0} = -\frac{1}{4} \left(\frac{T}{T_0} \right)^5.$$

PROB. 6 — URTI SUCCESSIVI

- Utilizziamo un sistema di assi coordinati, con asse x parallelo al muro e alla piastra, asse y normale alla piastra in direzione uscente, in modo da poter scrivere $\vec{v} = v \sin \alpha \hat{x} - v \cos \alpha \hat{y}$. Una volta avvenuto il contatto con la piastra, le uniche forze nel piano xy agenti sul cubo saranno la reazione normale della piastra $\vec{N} = N \hat{y}$ e l'attrito dinamico $\vec{f} = -f \hat{x}$. Dal momento che la piastra ha massa trascurabile \vec{N} è pari alla forza elastica della molla. Inoltre in regime di strisciamento vale $f = -\mu N$, dunque, indicando con y_0 la coordinata y della piastra, le equazioni del moto per il cubo (mentre è in contatto con la parte scabra e sta strisciando) saranno

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \mu k(y - y_0), \\ m\ddot{y} = -k(y - y_0). \end{cases}$$

Il moto lungo y sarà armonico; il cubo si staccherà dalla piastra quando la forza si annullerà, ovvero quando la piastra ripasserà dalla posizione di equilibrio $y = y_0$. In quell'istante la velocità lungo y del cubo sarà pari in modulo a quella di partenza, ma con segno opposto: $v'_y = +v \cos \alpha$. Dalle equazioni del moto segue anche che $\dot{x} + \mu \dot{y}$ è costante durante l'urto con la piastra finché il cubo continua a strisciare, visto che ha derivata temporale nulla. Abbiamo due scenari:

- Il cubo continua a strisciare fino al momento del distacco. Da quanto detto sopra segue che $v'_x = v(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha)$, ovvero

$$\vec{v}' = v(\sin \alpha - 2\mu \cos \alpha) \hat{x} + v \cos \alpha \hat{y}, \quad \tan \alpha' = \tan \alpha - 2\mu.$$

Ciò è possibile solo se $v'_x > 0$ (v_x decresce monotonamente e deve sempre essere positiva per rimanere nel regime di strisciamento), ovvero $\tan \alpha > 2\mu$;

- La velocità lungo x del cubo si annulla prima del distacco. In tal caso

$$\vec{v}' = v \cos \alpha \hat{y}, \quad \alpha' = 0,$$

ed è possibile solo se $\tan \alpha \leq 2\mu$.

- Durante un singolo urto, il tempo trascorso in contatto con una delle due piastre è $T_1 = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$; dal punto precedente vediamo che v_y si conserva in modulo, quindi tra un distacco e l'urto

successivo passa un tempo $T_2 = \frac{d}{v \cos \alpha}$. Usando le disuguaglianze del testo troviamo

$$T_2 = \frac{d}{v \cos \alpha} \gg \frac{\ell_0}{v \cos \alpha} \gg \frac{1}{\pi \cos \alpha} T_1 \Rightarrow T_2 \gg T_1.$$

Dunque è sufficiente trovare il numero totale N di urti necessari ad annullare v_x : potremo trascurare il tempo trascorso in contatto con le piastre e calcolare il tempo richiesto dal problema come $T = NT_2$. Visto che ad ogni urto v_x diminuisce della stessa quantità $\Delta v_x = -2\mu v \cos \alpha$, si avrà

$$N = \left[\frac{v \sin \alpha}{|\Delta v_x|} \right] = \left[\frac{\tan \alpha}{2\mu} \right] \Rightarrow T = \left[\frac{\tan \alpha}{2\mu} \right] \frac{d}{v \cos \alpha}.$$

PROB. 7 — OSCILLATORE H_2O

1. Sia x il discostamento della parete mobile dalla posizione di equilibrio. L'energia meccanica del sistema, per le assunzioni del problema, si conserva. Essendo il moto dell'acqua trascurabile, possiamo considerare l'energia cinetica come associata al solo moto della parete:

$$K = \frac{1}{2} M \dot{x}^2.$$

Si vuole ora calcolare l'energia potenziale gravitazionale dell'acqua. Le altezze h_1, h_2 nei due compartimenti saranno date, per conservazione del volume, dalle espressioni:

$$h_1 = \frac{LD}{2(D+x)}, \quad h_2 = \frac{LD}{2(D-x)}.$$

Per ognuno dei due compartimenti si calcola infine l'energia gravitazionale come

$$U = \frac{1}{2} \rho V h_{1,2} g,$$

dove $\frac{1}{2} h_{1,2}$ è l'altezza del centro di massa della colonna d'acqua e V il suo volume, e si somma su tutti e due gli scompartimenti, arrivando al risultato

$$U(x) = \frac{1}{8} \rho L^3 D^2 g \left(\frac{1}{D+x} + \frac{1}{D-x} \right) = \frac{\rho L^3 D^3 g}{4(D^2 - x^2)}.$$

Per trovare il periodo delle piccole oscillazioni, si espande $U(x)$ al secondo ordine come

$$U(x) \approx U(0) + U'(0)x + \frac{1}{2} U''(0)x^2 = U(0) + \frac{1}{2} k_e x^2,$$

con $U'(0) = 0$ in quanto $x = 0$ è un punto di equilibrio. Dall'espansione $\frac{1}{1-z^2} \approx 1 + z^2$, valida per $|z| \ll 1$, si trova

$$k_e = \frac{\rho L^3 g}{2D},$$

da cui, infine, il periodo delle piccole oscillazioni si può trovare in analogia a quello di un oscillatore armonico come

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_e}} = 2\pi\sqrt{\frac{2DM}{\rho g L^3}}.$$

2. Il secondo punto è molto simile: bisogna solo aggiungere al bilancio delle energie quella presente nel campo elettrico generato dai condensatori. Si nota che, prese singolarmente, le due metà del contenitore (quella piena d'acqua e quella vuota) possono essere viste come due condensatori in parallelo, uno riempito di un materiale dielettrico (fin dove sale il liquido) e l'altro privo di esso (dal pelo del liquido fino alla fine dei piatti). La capacità di un condensatore piano è

$$C = \frac{A\varepsilon_0\varepsilon_r}{d},$$

dove A è l'area delle sue armature d la distanza tra di esse. Da ciò, dalla conservazione del volume del punto 1, e dal fatto che le capacità di condensatori in parallelo si sommano, si possono trovare delle espressioni delle capacità equivalenti delle due metà (separate dalla parete mobile) in funzione del parametro x del punto 1:

$$C_1(x) = \frac{\varepsilon_0}{D+x} \left(L \left(L - \frac{LD}{2(D+x)} \right) + \varepsilon_r \frac{L^2 D}{2(D+x)} \right) = \frac{L^2 \varepsilon_0 ((\varepsilon_r + 1)D + 2x)}{2(D+x)^2},$$

$$C_2(x) = \frac{\varepsilon_0}{D-x} \left(L \left(L - \frac{LD}{2(D-x)} \right) + \varepsilon_r \frac{L^2 D}{2(D-x)} \right) = \frac{L^2 \varepsilon_0 ((\varepsilon_r + 1)D - 2x)}{2(D-x)^2}.$$

L'energia immagazzinata nel campo dei condensatori è

$$U(x) = \frac{1}{2}(C_1(x) + C_2(x))V^2.$$

In tutto ciò però l'energia del sistema non si conserva! Bisogna tenere conto dell'energia fornita al sistema dai generatori (solo includendo anch'essi nel sistema, se ne ottiene uno chiuso per scambi di energia): essa è

$$\Delta E = V \Delta Q = V^2 \Delta C,$$

quindi si ha, essendo V costante,

$$\Delta(E - CV^2) = 0.$$

Detta $U_g(x)$ l'energia gravitazionale del punto 1, si conserva quindi la quantità E' , definita come:

$$E' = K + U_g - \frac{1}{2}(C_1(x) + C_2(x))V^2,$$

Si noti il segno meno comparso! Nella maniera del punto 1, si può espandere tale potenziale al secondo ordine per x piccoli in $x = 0$, e ottenere, sempre in analogia alla molla:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k_e/M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\rho L^3 g}{2DM} - \frac{\epsilon_0 L^2 V^2 (3\epsilon_r - 1)}{MD^3}}}.$$

PROB. 8 — TRIANGOLO CARICO

1. Come è ben noto, il campo elettrico generato da uno qualunque dei fili carichi del problema in un punto a distanza r dal filo stesso ha modulo

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

ed è diretto lungo la direzione ortogonale al filo, lontano da esso in quanto $\lambda > 0$. Per simmetria, il campo elettrico generato dai tre fili nel punto O è nullo: infatti, ciascun filo ivi genera un campo di modulo uguale, e i tre campi formano tra di loro (a due a due) degli angoli di $\frac{2\pi}{3}$, perciò la loro somma vettoriale è nulla. Segue che il punto O è di equilibrio. Si verifica inoltre che l'equilibrio è instabile: spostando di poco la carica lungo l'asse ortogonale al triangolo e passante per il suo centro (che in seguito chiameremo asse z , come da convenzione), essa viene a trovarsi in un punto in cui il campo elettrico è diretto, per simmetria, lungo l'asse z , e ha verso diretto lontano dall'origine. Di conseguenza la particella, avendo carica positiva, subisce una forza diretta lontano dal punto di equilibrio, che dunque è instabile. Verifichiamolo esplicitamente: il punto $(0, 0, z)$ dista $r = \sqrt{\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + z^2}$ da ognuno dei fili, dunque la componente z del campo di ciascun filo in quel punto vale

$$E_z = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{z}{\left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + z^2} \approx \frac{6\lambda z}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Di conseguenza la forza netta agente sulla carica è, al prim'ordine in z

$$\vec{F} = 3qE_z\hat{z} = \frac{18q\lambda z}{\pi\epsilon_0 a^2}\hat{z},$$

confermando che l'equilibrio è instabile visto che $q\lambda > 0$.

2. Proponiamo due soluzioni per questo punto: la prima due segue un approccio più diretto, mentre la seconda semplifica il procedimento tramite un uso accorto delle simmetrie del sistema.

Riprendendo l'espressione del punto precedente per il campo elettrico di un filo in un punto arbitrario, osserviamo che il potenziale elettrico ad esso associato si può scrivere come

$$V(\ell) = - \int_{r_0}^r \frac{\lambda dx}{2\pi\epsilon_0 x} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

dove r_0 è una distanza di riferimento irrilevante, in quanto corrisponde alla scelta di uno zero arbitrario per il potenziale. Dette r_1 , r_2 ed r_3 le distanze del punto (x, y) dai tre fili (avendo scelto come primo filo quello diretto lungo l'asse x), abbiamo dunque che l'energia potenziale totale della carica vale

$$U(x, y) = - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1 r_2 r_3}{r_0^3}\right).$$

Vediamo dapprima un modo furbo per scoprire che l'equilibrio nel piano è stabile: dall'espressione data, possiamo direttamente concludere che all'interno del triangolo il potenziale ha un unico punto di minimo nel centro. Questo è vero perché il potenziale è minimo se e solo se $r_1 r_2 r_3$ è massimo. Ora, $r_1 + r_2 + r_3$ è uguale su tutti i punti (perché $\frac{ar_1}{2} + \frac{ar_2}{2} + \frac{ar_3}{2}$ è la somma delle tre aree di ABP , BCP e CAP , che è uguale a quella di ABC , ed è in particolare quindi uguale a $3r$ dove r è la distanza tra O e i lati). Adesso, fissata la somma di una serie di variabili positive, il prodotto è massimo (e quindi il potenziale è minimo) se e solo se sono tutte uguali (disuguaglianza tra media aritmetica e media geometrica), quindi se e solo se $r_1 = r_2 = r_3 = r$, cioè se e solo se P è il centro.

Esprimiamo ora le tre lunghezze in funzione di x e y . Con un po' di geometria, si trova (assumendo che il punto (x, y) sia all'interno del triangolo, visto che vogliamo studiare le piccole oscillazioni):

$$r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} + y, \quad r_2 = \frac{a - 3x - \sqrt{3}y}{2\sqrt{3}}, \quad r_3 = \frac{a + 3x - \sqrt{3}y}{2\sqrt{3}}.$$

Segue che

$$U(x, y) = - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(a + 2\sqrt{3}y)((a - \sqrt{3}y)^2 - 9x^2)}{(2\sqrt{3}\ell_0)^3}\right).$$

Per verificare la stabilità dell'equilibrio, espandiamo quest'espressione attorno a $x = 0, y = 0$, tenendo i termini di ordine fino al secondo in x e y e scartando gli altri:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{(a + 2\sqrt{3}y)(a^2 - 2\sqrt{3}ay + 3y^2 - 9x^2)}{(2\sqrt{3}\ell_0)^3}\right) \approx - \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a^3 - 9a(x^2 + y^2)}{(2\sqrt{3}\ell_0)^3}\right) \\ &\approx - \frac{3q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{a}{2\sqrt{3}\ell_0}\right) + \frac{9q\lambda(x^2 + y^2)}{2\pi\epsilon_0 a^2}. \end{aligned}$$

Osserviamo quindi che, a meno di un'irrilevante costante additiva, per piccoli spostamenti dal punto di equilibrio l'energia potenziale ha la forma di quella di una molla, in quanto $q\lambda > 0$. Concludiamo dunque che l'equilibrio è stabile se gli spostamenti della particella

sono confinati al piano del triangolo, come già scoperto. Osserviamo inoltre che, data la dipendenza del potenziale da $x^2 + y^2$, e quindi solo dalla distanza del punto dall'origine, la pulsazione delle piccole oscillazioni non dipende dalla direzione nel piano lungo la quale è effettuato lo spostamento. Si conclude dunque che tale pulsazione vale

$$\omega = \sqrt{\frac{9q\lambda}{m\pi\epsilon_0 a^2}},$$

perciò il periodo cercato è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\pi\epsilon_0 a^2}{9q\lambda}}.$$

Avremmo potuto trovare il periodo delle oscillazioni lungo l'asse y anche calcolando esplicitamente il campo elettrico sui punti dell'asse vicini all'origine. Per simmetria, l'unica componente non nulla sarà E_y . Assumendo, come prima, che il punto in cui il campo viene calcolato sia all'interno del triangolo, le sue distanze dai tre fili saranno

$$r_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} + y, \quad r_2 = r_3 = \frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{y}{2}.$$

Di conseguenza avremo

$$E_y = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\frac{a}{2\sqrt{3}} + y} - 2 \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{a}{2\sqrt{3}} - \frac{y}{2}} \right) \approx -\frac{9\lambda y}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Da ciò segue che, al prim'ordine in y , vale

$$m\ddot{y} = qE_y = -\frac{9q\lambda y}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Perciò il periodo delle piccole oscillazioni parallele ad y vale

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\pi\epsilon_0 a^2}{9q\lambda}},$$

coerentemente con il risultato trovato in precedenza.

Vediamo ora come si poteva ottenere lo stesso risultato sfruttando le simmetrie del sistema. Poiché l'origine è un punto di equilibrio, sappiamo che, per $|x|, |y| \ll a$, il potenziale elettrostatico si potrà scrivere nella forma

$$V(x, y) \approx V_0 + bx^2 + cxy + dy^2,$$

dove l'assenza di termini lineari in x e y è dettata dall'equilibrio del punto, V_0 è una costante additiva, e b, c, d sono costanti per ora ignote. Il potenziale dovrà avere tutte le simmetrie della distribuzione di carica che lo genera. Di conseguenza dovrà essere invariante per rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ e simmetrie rispetto al piano yz . Quest'ultima simmetria manda y

in y , x in $-x$, dunque il potenziale viene mandato in

$$V(x, y) = V(-x, y) = V_0 + bx^2 - cxy + dy^2.$$

Confrontando le due espressioni per V , possiamo concludere che la simmetria impone $c = 0$. A questo punto possiamo riscrivere V in questa forma:

$$V(x, y) = V_0 + \frac{b+d}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b-d}{2}(x^2 - y^2).$$

Una rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ manda (x, y) in $(-\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$. Applicando ciò al potenziale si dovrà avere

$$V(x, y) = V\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}x, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right) = V_0 + \frac{b+d}{2}(x^2 + y^2) + \frac{b-d}{2}\sqrt{3}xy$$

Comparando le due espressioni arriviamo infine a $b = d$, ovvero per $r \ll a$ vale

$$V(r) = V_0 + br^2.$$

Abbiamo dunque dimostrato, più in generale, che, al secondo ordine in $\frac{r}{a}$, una simmetria per riflessioni e rotazioni di $\frac{2\pi}{3}$ implica invarianza sotto rotazioni di qualunque angolo. Dunque abbiamo ottenuto che la pulsazione delle piccole oscillazioni (se presenti) non dipende dalla direzione nel piano xy . Resta da determinare b , per farlo usiamo la Legge di Gauss. Se consideriamo una piccola superficie cilindrica di raggio $r \ll a$ e altezza $2h \ll a$, centrata nell'origine e con l'asse coincidente con l'asse z , abbiamo che il flusso del campo elettrico generato dai tre fili attraverso tale superficie chiusa deve annullarsi. Al primo ordine, possiamo approssimare la componente z di tale campo elettrico in ciascun punto di ciascuna base col valore che assume al centro di tale base, che si calcola facilmente:

$$E_z(0, 0, \pm h) = 3 \cdot \frac{\pm\lambda h}{2\pi\epsilon_0 \left(h^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2\right)} \approx \pm \frac{18h\lambda}{\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Allo stesso modo, in ciascun punto della superficie laterale possiamo approssimare il valore della componente radiale del campo elettrico con

$$E_r(r, 0) \approx -\frac{d}{dr}V(r) \approx -2br.$$

Possiamo quindi scrivere il flusso totale al primo ordine in $\frac{h}{a}$ e $\frac{r}{a}$ come

$$\begin{aligned} \Phi &\approx \pi r^2 (E_z(0, h) - E_z(0, -h)) + 2\pi r h E_r(r, 0) \approx \frac{18h\lambda r^2}{\epsilon_0 a^2} - 4b\pi r^2 h = 0 \\ \Rightarrow b &= \frac{9\lambda}{2\pi a^2 \epsilon_0}. \end{aligned}$$

Possiamo ora calcolare la pulsazione delle piccole oscillazioni:

$$\omega = \sqrt{\frac{2qb}{m}} = \sqrt{\frac{9\lambda q}{m\pi a^2 \varepsilon_0}},$$

in accordo col risultato precedente.

PROB. 9 — BOLLA NEL VUOTO

1. Nel tempo in cui la bolla si espande nel vuoto fino a raggiungere uno stato di equilibrio, il sistema può essere considerato isolato, in quanto, per le ipotesi del problema, la pressione esterna si è già annullata, dunque l'aria esterna non fa lavoro sulla bolla, e non ci sono scambi di calore. Di conseguenza, la somma del lavoro svolto dal gas e di quello svolto dalle forze di tensione superficiale deve essere nulla. Per definizione di tensione superficiale, il lavoro infinitesimo da esso svolta in seguito a una variazione dr del raggio della bolla è

$$dL_\gamma = -dU = -\gamma dA = -\gamma \cdot 2d(4\pi r^2) = -\gamma \cdot 16\pi r dr$$

$$\Rightarrow L_\gamma = - \int_{r_0}^{r_1} \gamma \cdot 16\pi r dr = 8\pi\gamma(r_0^2 - r_1^2).$$

Il fattore 2 è dovuto alla presenza di due interfacce liquido-gas, una interna ed una esterna, mentre dA è la variazione infinitesima dell'area totale delle due interfacce. Per quanto riguarda il gas all'interno, visto che la trasformazione non è quasistatica, applicheremo il primo principio della termodinamica per una trasformazione adiabatica:

$$L_g = -\Delta U = \frac{3}{2}(p_i V_i - p_f V_f).$$

È necessario un legame tra pressione del gas e raggio della bolla, per cui utilizzeremo la legge di Laplace, che si ricava come segue. Il lavoro delle forze di pressione in un'espansione infinitesima è

$$dL_p = (p_{\text{int}} - p_{\text{ext}})4\pi r^2 dr.$$

Il lavoro svolto dalla tensione superficiale è invece

$$dL_\gamma = -\gamma dA = -\gamma \cdot 2d(4\pi r^2) = -\gamma \cdot 16\pi r dr.$$

All'equilibrio, questi due contributi si devono elidere, quindi:

$$dL_p + dL_\gamma = 0 \Rightarrow p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} = \frac{4\gamma}{r}.$$

Dunque, il lavoro svolto dal gas tra stato iniziale e stato finale diventa:

$$L_g = 2\pi(p_0 r_0 + 4\gamma)r_0^2 - 8\pi\gamma r_1^2.$$

Ora diventa semplice calcolare il raggio della bolla all'equilibrio:

$$L_\gamma + L_g = 0 \Rightarrow r_1 = r_0 \sqrt{1 + \frac{p_0 r_0}{8\gamma}}.$$

2. All'equilibrio termodinamico la potenza assorbita dalla bolla deve essere uguale a quella irradiata. Questo permette di trovare la sua temperatura T . Per la Legge di Stefan-Boltzmann, la bolla irradia una potenza

$$P_{\text{out}} = 4\pi r^2 \varepsilon \sigma T^4,$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann, mentre, irradiando il Sole in maniera isotropa, a distanza d la sua intensità vale $I = \frac{P_S}{4\pi d^2}$, dunque la potenza ricevuta dalla bolla è

$$P_{\text{in}} = \varepsilon \pi r^2 \frac{P_S}{4\pi d^2} = \frac{\varepsilon P_S r^2}{4d^2}.$$

Dunque si ha

$$P_{\text{in}} = P_{\text{out}} \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P_S}{16\pi\sigma d^2}}.$$

Sfruttando l'equazione di stato del gas perfetto e la legge di Laplace si ricava dunque il raggio r della bolla:

$$\begin{aligned} pV = nRT &\Rightarrow \frac{4\gamma}{r_2} \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3 = nR \sqrt[4]{\frac{P_S}{16\pi\sigma d^2}}, \\ \Rightarrow r_2 &= \sqrt{\frac{3nR}{16\pi\gamma}} \sqrt[4]{\frac{P_S}{16\pi\sigma d^2}}. \end{aligned}$$

Per trovare un'equazione che descriva la velocità di variazione del raggio nelle fasi intermedie della trasformazione, è necessario adoperare il primo principio della termodinamica nella sua forma infinitesima, includendo il contributo all'energia dovuto alla tensione superficiale:

$$dQ = dU + dL \Rightarrow \varepsilon \pi r^2 \left(\frac{P_S}{4\pi d^2} - 4\sigma T^4 \right) dt = 16\pi\gamma r dr + \frac{3}{2}nRdT.$$

Dall'equazione di stato si ricava

$$nRdT = pdV + Vdp,$$

dunque, sostituendo questa relazione, l'equazione di stato del gas perfetto e la legge di

Laplace nel bilancio energetico e dividendo per dt si ottiene un'equazione differenziale in r :

$$\begin{aligned}\varepsilon\pi r^2 \left(\frac{P_S}{4\pi d^2} - 4\sigma \left(\frac{pV}{nR} \right)^4 \right) &= 16\pi\gamma r \frac{dr}{dt} + \frac{3}{2}p \frac{dV}{dt} + \frac{3}{2}V \frac{dp}{dt} \\ \Rightarrow \varepsilon\pi r^2 \left(\frac{P_S}{4\pi d^2} - 4\sigma \left(\frac{16\pi\gamma r^2}{3nR} \right)^4 \right) &= 16\pi\gamma r \frac{dr}{dt} + 24\pi\gamma r \frac{dr}{dt} - 8\pi\gamma r \frac{dr}{dt} \\ \Rightarrow \varepsilon r \left(\frac{P_S}{4\pi d^2} - 4\sigma \left(\frac{16\pi\gamma r^2}{3nR} \right)^4 \right) &= 32\gamma \frac{dr}{dt}.\end{aligned}$$

Si conclude che la velocità di variazione del raggio della bolla è

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon r}{32\gamma} \left(\frac{P_S}{4\pi d^2} - 4\sigma \left(\frac{16\pi\gamma r^2}{3nR} \right)^4 \right).$$

PROB. 10 — CIRCUITO CON CELLA DI PELTIER

1. La cella di Peltier assorbe una potenza

$$P_u = P + P_t = \alpha TI + k(T - T_0)$$

dal corpo superiore e di questa ne immette

$$P_c = \mathcal{E}I = \alpha(T - T_0)I$$

nel circuito. Per la conservazione dell'energia, ad ogni istante si ha

$$P_u - P_c - P_d = 0,$$

dove P_d è la potenza ceduta dalla cella al corpo inferiore, quindi

$$P_d = P_u - P_c = \alpha TI + k(T - T_0) - \alpha(T - T_0)I = \alpha T_0 I + k(T - T_0).$$

2. È possibile ora scrivere l'equazione del circuito:

$$\mathcal{E} - R_0 I - RI = 0 \Rightarrow \alpha(T - T_0) = (R + R_0)I.$$

Al contempo, poiché avviene assorbimento di calore dal corpo superiore, si ha

$$\alpha TI + k(T - T_0) = -C\dot{T},$$

da cui, sostituendo l'espressione di I , si ottiene

$$\frac{\alpha^2 T (T - T_0)}{R + R_0} + k (T - T_0) = -C\dot{T} \Rightarrow \frac{dT}{(T - T_0) \left(T + \frac{k(R+R_0)}{\alpha^2} \right)} = -\frac{\alpha^2}{C(R + R_0)} dt.$$

Integrando si ottiene

$$\int_{T_i}^T \frac{1}{(T' - T_0) \left(T' + \frac{k(R+R_0)}{\alpha^2} \right)} dT' = -\frac{\alpha^2}{C(R + R_0)} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_0 + B} \left(\ln \left(\frac{T - T_0}{T + B} \right) - \ln \left(\frac{T_i - T_0}{T_i + B} \right) \right) = -\frac{k}{BC} t$$

$$\Rightarrow T(t) = \frac{\frac{B(T_i - T_0)}{T_i + B} e^{-\frac{k(T_0 + B)}{BC} t} + T_0}{1 - \frac{T_i - T_0}{T_i + B} e^{-\frac{k(T_0 + B)}{BC} t}}.$$

3. Si scriva ora l'equazione del nuovo circuito:

$$\mathcal{E} - R_0 I - L\dot{I} = 0 \Rightarrow \alpha (T - T_0) - R_0 I - L\dot{I} = 0.$$

Anche in questo caso, vale

$$\alpha T I + k (T - T_0) = -C\dot{T},$$

perciò, risolvendo rispetto ad I , si trova

$$I = -\frac{C\dot{T}}{\alpha T} - \frac{k(T - T_0)}{\alpha T} = -\frac{C\dot{T}}{\alpha T} + \frac{k T_0}{\alpha T} - \frac{k}{\alpha}.$$

Derivando rispetto al tempo, si ottiene

$$\dot{I} = -\frac{C\ddot{T}}{\alpha T} + \frac{C\dot{T}^2}{\alpha T^2} - \frac{k T_0}{\alpha} \frac{\dot{T}}{T^2},$$

da cui, sostituendo nell'equazione del circuito, abbiamo

$$\alpha^2 T^2 (T - T_0) + R_0 C T \dot{T} - R_0 k T_0 T + R_0 k T^2 + L C T \ddot{T} - L C \dot{T}^2 + L k T_0 \dot{T} = 0.$$

4. Ponendo $T = T_0 + \delta$ si ottiene

$$\begin{aligned} & \alpha^2 (T_0 + \delta)^2 \delta + R_0 C (T_0 + \delta) \dot{\delta} - R_0 k T_0 (T_0 + \delta) \\ & + R_0 k (T_0 + \delta)^2 + L C (T_0 + \delta) \ddot{\delta} - L C \dot{\delta}^2 + L k T_0 \dot{\delta} = 0, \end{aligned}$$

Perciò, trascurando i termini di ordine superiore al primo e semplificando, troviamo

$$\alpha^2 T_0^2 \delta + R_0 C T_0 \dot{\delta} - R_0 k T_0^2 - R_0 k T_0 \delta + R_0 k T_0^2 + 2R_0 k T_0 \delta + L C T_0 \ddot{\delta} + L k T_0 \dot{\delta} = 0$$

$$\Rightarrow L C T_0 \ddot{\delta} + (R_0 C T_0 + L k T_0) \dot{\delta} + (\alpha^2 T_0^2 + R_0 k T_0) \delta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta} + \frac{R_0 C + L k}{L C} \dot{\delta} + \frac{\alpha^2 T_0 + R_0 k}{L C} \delta = 0,$$

da cui, supponendo R_0 e k piccoli rispetto alle altre grandezze, l'equazione caratteristica avrà soluzioni complesse con parte immaginaria di modulo

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha^2 T_0 + R_0 k}{L C} - \left(\frac{R_0 C + L k}{2 L C}\right)^2}.$$