

Soluzioni del Pretest di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

20 novembre 2024

PROB. 1 — DA ZERO A CENTO

Innanzitutto possiamo limitarci a considerare traiettorie rettilinee tra il punto di partenza e quello di arrivo: se avessimo una soluzione ottimale che percorre un'altra traiettoria potremmo ottenerne un'altra equivalente proiettando sulla congiungente dei due punti, trovando quindi una soluzione che rispetta il vincolo (visto che, proiettando, il modulo dell'accelerazione non può aumentare) e che impiega lo stesso tempo totale.

Notiamo inoltre che è sufficiente trovare la giusta $a'(t)$ che permette di raggiungere il punto medio del segmento nel minor tempo possibile, senza vincoli sulla velocità nel momento in cui tale punto viene raggiunto: se la partenza avviene a $t = 0$ e il punto medio viene raggiunto a $t = T$, allora

$$a(t) = \begin{cases} a'(t) & 0 \leq t \leq T \\ -a'(t - T) & T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

permette di arrivare al traguardo a velocità nulla e nel tempo ottimale $2T$.

Ma se non si hanno vincoli sulla velocità di arrivo, è ovvio che per impiegare il minor tempo possibile si dovrà avere $a'(t) = a_0$, dunque $T = \sqrt{\frac{d}{a_0}}$ e

$$t_{\text{tot}} = 2T = 2\sqrt{\frac{d}{a_0}}.$$

Risposta: $\boxed{1,0690 \times 10^1 \text{ s}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 2 — PALLINA APPESA

Le forze che agiscono sulla pallina sono la tensione del filo e la forza peso. La pallina compie un moto circolare uniforme attorno a un asse verticale che passa per il punto del soffitto a cui è attaccato il filo. La somma totale delle forze deve quindi fare da forza centripeta per permettere il moto circolare, e deve avere componente verticale nulla. Chiamando T il valore della tensione, e θ l'angolo che il filo forma con la verticale, abbiamo le relazioni

$$\begin{cases} T \cos \theta = mg, \\ T \sin \theta = m \left(\frac{4\pi^2}{T^2} \right) R, \end{cases}$$

*segreteria.stagefisica@sns.it

da cui otteniamo

$$\tan \theta = \frac{4\pi^2 R}{gT^2},$$

che ci permette di ottenere una relazione per R:

$$R = l \sin \theta = l \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}.$$

Sostituendo per $\tan \theta$ il valore precedentemente trovato e semplificando ricaviamo finalmente

$$R = \sqrt{l^2 - \left(\frac{gT^2}{4\pi^2}\right)}.$$

Risposta: $\boxed{8,2923 \times 10^{-1} \text{ m.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 3 — GAS MESCOLATI

Poiché le pareti del contenitore sono adiabatiche e rigide, l'energia del gas in esso contenuto è costante. Il suo valore iniziale, essendo $c_p = \frac{5R}{2}$ la capacità termica molare di un gas perfetto biatomico, è

$$U = \frac{5R}{2} \left(nT + \frac{n}{2}(2T) + \frac{n}{3}(3T) \right) = \frac{15nRT}{2}.$$

All'equilibrio, le $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} = \frac{11n}{6}$ moli di gas avranno la stessa temperatura T' finale, quindi

$$U = \frac{5R}{2} \frac{11nT'}{6}.$$

Si conclude quindi che

$$\frac{55nRT'}{12} = \frac{15nRT}{2} \Rightarrow T' = \frac{18}{11}T.$$

Risposta: $\boxed{6,5455 \times 10^2 \text{ K.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 4 — GETTO D'ACQUA

Per la legge di Torricelli, la velocità v dell'acqua che fuoriesce dal foro vale

$$v = \sqrt{2gx},$$

dove x è l'altezza della superficie libera dell'acqua sopra al foro. Osserviamo dunque che la massima velocità iniziale, che determina la gittata dell'acqua, è

$$v_{\max} = \sqrt{2Hg}.$$

L'acqua uscente, la cui velocità iniziale è orizzontale, esegue un moto parabolico, descritto dall'equazione

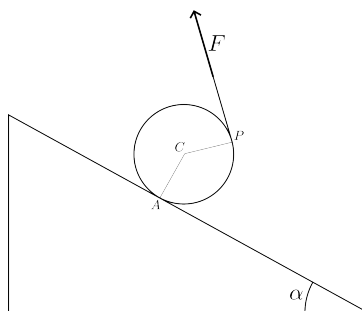
$$\begin{cases} x = v_{\max}t, \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

Ponendo $y = 0$ possiamo risolvere per x , ottenendo

$$x = v_{\max} \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{hH}.$$

Risposta: $\boxed{1,0000 \times 10^2 \text{ cm.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 5 — FORZA MINIMA



Affinché il cilindro stia fermo, è necessario che il momento torcente totale rispetto al punto A sia nullo. Facendo riferimento alla figura, la forza \vec{F} è tangente al cilindro, in quanto parallela al filo. Sia R il raggio del cilindro, e sia θ l'angolo tra la retta AC e il segmento CP , in modo che esso sia nullo quando i segmenti sono allineati e non coincidenti. In un sistema di coordinate cartesiane Oxy centrato in A e con asse x parallelo al piano inclinato, le coordinate del punto di applicazione di F sono date da

$$\vec{r} = (R \sin \theta, R(1 + \cos \theta)),$$

mentre F ha componenti

$$\vec{F} = (-F \cos \theta, F \sin \theta).$$

Calcolando il modulo del momento torcente otteniamo allora

$$\tau_F = RF(1 + \cos \theta).$$

Il modulo momento torcente della forza peso è invece

$$\tau_g = mgR \sin \alpha,$$

e la condizione di momento totale nullo è $\tau_F = \tau_g$, ovvero

$$F(1 + \cos \theta) = mg \sin \alpha,$$

da cui

$$F = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \cos \theta}.$$

Vediamo che tale espressione è minima per $\theta = 0$, e quindi il risultato finale è

$$F_{\min} = \frac{1}{2} mg \sin \alpha.$$

Risposta: $\boxed{1.0217 \text{ N.}}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 6 — NIENTE ATTRITO, GRAZIE

Poniamo $T = 150$ s (due minuti e mezzo) e $R = 1$ km. Chiamiamo inoltre θ l'angolo cercato. Se N è il modulo della reazione normale tra pista e automobile, allora, in assenza di attrito, la componente orizzontale di questa forza, cioè $N \sin \theta$, eguaglia la forza centripeta $mR \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$:

$$N \sin \theta = mR \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

dove m è la massa dell'automobile. Allo stesso modo, l'equilibrio delle forze nella direzione verticale impone che si abbia

$$N \cos \theta = mg.$$

Eliminando N dalle due equazioni si ottiene infine

$$\tan \theta = \frac{4\pi^2 R}{gT^2}.$$

Risposta: $1,0144 \times 10^1$ °. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 7 — A VOLTE RITORNANO

Poiché la velocità verticale iniziale del proiettile è $v_0 \sin \theta$, essendo θ l'angolo che il cannone forma con l'orizzontale, il tempo di volo totale del proiettile è dato da

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta}{g},$$

da cui si ricava $\sin \theta = \frac{gt}{2v_0}$. In questo tempo, il proiettile percorre una distanza orizzontale data da

$$d = v_0 \cos \theta t = v_0 t \sqrt{1 - \frac{g^2 t^2}{4v_0^2}},$$

mentre la distanza percorsa dalla macchina, essendo il suo moto uniformemente accelerato, vale

$$x = \frac{at^2}{2}.$$

Pertanto, imponendo $d = x$, si trova

$$\frac{at}{2} = v_0 \sqrt{1 - \frac{g^2 t^2}{4v_0^2}} \Rightarrow t = \frac{2v_0}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

Risposta: $4,0578 \times 10^1$ s. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 8 — VIVA IL SISTEMA INTERNAZIONALE!

Le unità di misura di \hbar sono quelle di un'azione, quindi del prodotto di una lunghezza e di una quantità di moto. Quest'ultima ha a sua volta le unità di misura del prodotto di una massa e di una velocità. Ci è sufficiente dunque invertire le relazioni date nel testo per esprimere, nel nuovo sistema di unità di misura, le unità con cui nell'SI si misurano masse, lunghezze e velocità:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{27.618} \text{ rd}, \quad 1 \text{ kg} = \frac{1}{10^3 \cdot 204.1} \text{ SoL}, \quad 1 \text{ ms}^{-1} = \frac{3.6}{57.41} \text{ Vs}.$$

In questo modo si ottiene il valore numerico di \hbar nelle nuove unità di misura come

$$[\hbar]' = \frac{3.6}{27.618 \cdot 10^3 \cdot 204.1 \cdot 57.41} [\hbar].$$

Risposta: $\boxed{1,1732 \times 10^{-42} \text{ rdSoLVs.}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 9 — QUADRATO DI CARICHE

Utilizziamo un sistema di coordinate con origine O nel centro del quadrato. Le condizioni iniziali sono chiaramente simmetriche rispetto a O , e, sempre per simmetria, la forza netta agente su ognuna delle cariche è parallela al suo vettore posizione. Dunque in tutto il moto successivo le cariche saranno sempre disposte ai vertici di un quadrato di centro O e lato $a(t)$, con $a(0) = L$. Visto che in questa configurazione la forza è sempre repulsiva, le cariche continueranno ad allontanarsi indefinitamente. Dal momento che sul sistema non agiscono forze esterne, l'energia totale si conserva. Dalla simmetria del problema segue che in ogni istante $|\vec{v}_1(t)| = |\vec{v}_2(t)| = |\vec{v}_3(t)| = |\vec{v}_4(t)| = v(t)$, dunque

$$E_{\text{tot}} = 4 \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(4 \frac{1}{a} + 2 \frac{1}{\sqrt{2}a} \right) = 2m v^2 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} (4 + \sqrt{2}) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 L} (4 + \sqrt{2}).$$

La velocità massima si ottiene quando $a \rightarrow +\infty$, ovvero

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m L} \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}.$$

Risposta: $\boxed{2,9817 \times 10^{-3} \text{ m/s.}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 10 — QUANTO MANCA?

Sia R il rateo di massa di sabbia caduta per unità di tempo. Per ipotesi, sappiamo che R può dipendere solo da ρ , A e g . Poiché le unità di misura di R sono quelle di una massa divisa per un tempo, l'analisi dimensionale ci permette di concludere che

$$R(\rho, A, g) = k \rho g^{\frac{1}{2}} A^{\frac{5}{4}},$$

dove k è una costante adimensionale positiva. Di conseguenza, il tempo necessario affinché cada una quantità di massa m è dato da

$$T = \frac{m}{R(\rho, A, g)} = \frac{m}{k\rho g^{\frac{1}{2}} A^{\frac{5}{4}}}.$$

Se ora il sistema viene riscalato di un fattore 2, la nuova clessidra conterrà una massa totale $m' = 8m$, cioè 8 volte la massa della prima clessidra, in quanto la massa scala linearmente col volume, che a sua volta scala cubicamente con la lunghezza. Allo stesso modo, l'area A' dell'apertura della nuova clessidra varrà $4A$. Di conseguenza il nuovo tempo sarà dato dall'espressione

$$T' = \frac{m'}{R(\rho, A', g)} = \frac{8m}{k\rho g^{\frac{1}{2}} (4A)^{\frac{5}{4}}} = \sqrt{2}T,$$

da cui segue che il rapporto cercato vale $\sqrt{2}$.

Risposta: 1.4142. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 11 — PALLINE APPESE CON ELASTICO —

Chiamiamo x l'allungamento di ciascuno degli elastici superiori, y quello dell'elastico centrale, e θ l'angolo cercato. La condizione sulla distanza tra i punti di contatto tra soffitto ed elastici si scrive come

$$2x \cos \theta + y = d,$$

mentre il bilancio delle forze su ciascuna massa, nelle due direzioni orizzontale e verticale, dà le equazioni

$$k_1 x \cos \theta = k_2 y, \quad k_1 x \sin \theta = mg.$$

Eliminando x e y dalle equazioni, si ottiene quindi

$$\tan \theta = \frac{mg(k_1 + 2k_2)}{k_1 k_2 d},$$

da cui segue immediatamente l'espressione cercata.

Risposta: $1,9367 \times 10^{-1}$ rad. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 12 — DECORAZIONE STRANA —

Osserviamo preliminarmente che la proiezione orizzontale della distanza tra i centri di due rettangoli consecutivi vale

$$x = a \cos \theta - 2b \sin \theta,$$

mentre la proiezione orizzontale della distanza tra il centro del primo rettangolo e il punto in cui è collegato tramite elastico (punto P) vale

$$x_1 = a \cos \theta - b \sin \theta.$$

All'equilibrio, il baricentro del sistema deve trovarsi sulla verticale passante per P . Da quanto osservato preliminarmente, è chiaro che la proiezione orizzontale della distanza tra P e il centro dell' n -esimo rettangolo vale

$$x_n = x_1 + (n-1)x = a \cos \theta n - b \sin \theta (2n-1).$$

Dunque, se si hanno N rettangoli, la distanza del baricentro del sistema dalla verticale passante per P varrà

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n = \frac{N+1}{2} a \cos \theta - Nb \sin \theta,$$

perciò l'angolo di equilibrio soddisfa

$$\tan \theta = \frac{(N+1)a}{2Nb}.$$

Nel limite in cui si hanno molti rettangoli, so ottiene quindi

$$\theta = \arctan\left(\frac{a}{2b}\right).$$

Risposta: $\boxed{5,7133 \times 10^{-1} \text{ rad.}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 13 — GAS E CARRUCOLA

All'equilibrio, la tensione nei due capi della corda ha lo stesso valore F , perciò, avendo la puleggia massa nulla, il pistone viene tirato verso l'alto con una forza complessiva $2F$. Questa forza è bilanciata dalla differenza tra la pressione esterna p_0 e la pressione interna finale p , ossia

$$2F = A(p_0 - p).$$

Poiché il contenitore è termicamente isolato, e il processo avviene lentamente, la trasformazione può essere trattata come un'adiabatica irreversibile, dunque il volume finale V soddisfa

$$pV^\gamma = p_0V_0^\gamma,$$

essendo $\gamma = \frac{5}{3}$ il coefficiente adiabatico del gas perfetto monoatomico e p_0 il valore iniziale della sua pressione. Eliminando p dalla prima equazione, e risolvendo per V , si ottiene quindi

$$V = \frac{V_0}{\left(1 - \frac{2F}{p_0A}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}.$$

Risposta: $\boxed{2.0079 \text{ L.}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 14 — PALLONCINO ACCELERATO

Poniamoci nel sistema di riferimento accelerato del vagone, con asse \hat{x} orientato nella direzione del moto. Oltre alle forze interne, una massa di prova δm posta all'interno del vagone risentirà dell'azione combinata di forza di gravità $-\delta m g \hat{y}$ e della forza apparente $-\delta m a \hat{x}$. Ma ciò è equivalente a porre il vagone, fermo, in un campo di gravità esterno $\vec{g}_{\text{eff}} = -g \hat{y} - a \hat{x}$. Possiamo dunque applicare il principio di Archimede: visto che il palloncino è meno denso dell'aria circostante, all'equilibrio il suo vettore posizione \vec{r} sarà antiparallelo alle linee di campo. Dunque

$$\vec{r} = l \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}} \hat{x} + l \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}} \hat{y} \Rightarrow D = \frac{L}{2} + l \frac{a}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

Risposta: 5.4542 m. Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 15 — MATERIALE FILTRANTE

Per la legge di Snell, l'angolo di rifrazione del raggio laser θ_r è dato da

$$n \sin \theta_r = \sin \theta_i.$$

Pertanto, la distanza percorsa dal raggio nel materiale prima di riemergere è data da

$$x = \frac{d}{\cos \theta_r} = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{n^2}}} = \frac{d}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}}.$$

Da qui si conclude tramite la formula data nel testo:

$$\frac{I(x)}{I_0} = \exp \left[-\frac{kd}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} \right].$$

Risposta: $1,8923 \times 10^{-1}$ Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 16 — MISCUGLIO DI GAS

All'equilibrio i due gas avranno la stessa temperatura. Se p_1 , p_2 sono le pressioni parziali allora $p = p_1 + p_2$ e

$$p_1 V = n_1 R T, \quad p_2 V = n_2 R T \Rightarrow p V = (n_1 + n_2) R T.$$

L'energia totale è data da

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{\gamma_1 - 1} n_1 R T + \frac{1}{\gamma_2 - 1} n_2 R T = \frac{1}{\gamma - 1} (n_1 + n_2) R T,$$

dove $\gamma_1 = \frac{5}{3}$ è il coefficiente adiabatico del gas perfetto monoatomico, $\gamma_2 = \frac{7}{5}$ è quello del gas perfetto biatomico, e γ è definito tramite

$$\frac{1}{\gamma - 1} = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \frac{1}{\gamma_1 - 1} + \frac{n_2}{n_1 + n_2} \frac{1}{\gamma_2 - 1}.$$

Notando che la miscela dei due gas è equivalente a un gas con $n_1 + n_2$ particelle con coefficiente adiabatico γ come sopra, si ha che durante un'adiabatica il rapporto $p^{\gamma-1}/T^\gamma$ è costante, da cui $\frac{\gamma}{\gamma-1} = \frac{16}{5}$ e quindi

$$\gamma = \frac{16}{11}.$$

Infine, dalla definizione di γ è possibile esprimere il rapporto $\frac{n_1}{n_2}$ come

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\gamma - \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma} \frac{\gamma_1 - 1}{\gamma_2 - 1}.$$

Risposta: $\boxed{4,2857 \times 10^{-1}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 17 — VEDO DOPPIO? —————

Per la legge delle lenti, la prima sorgente crea un'immagine reale la cui distanza q dalla lente soddisfa

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

e tale che essa si trovi nel semiasse ottico della lente su cui non è presente la prima sorgente. Da questa stessa equazione si deduce inoltre che non è possibile avere una seconda sorgente, posta sullo stesso semiasse della prima ma distinta da essa, tale che la sua immagine coincida con quella della prima. Dunque per la seconda sorgente possiamo scrivere

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

dove p_2 è la distanza (positiva) tra la seconda sorgente e la lente. Sommando le due equazioni per eliminare q si ottiene

$$p_2 = \frac{fp_1}{2p_1 - f},$$

da cui la distanza tra le due sorgenti vale

$$d = p_1 + p_2 = \frac{2p_1^2}{2p_1 - f}.$$

Risposta: $\boxed{2,4000 \times 10^{-1} \text{ m.}}$ *Errore massimo consentito: 0.5%.*

PROB. 18 — PALLONCINO SUBACQUEO —————

Per via di quanto scritto nel testo del problema, sappiamo che sul palloncino agiscono due forze: la forza elastica dovuta alla molla e la forza di Archimede. Quando il palloncino occupa un volume V' e si trova a una profondità d' , detta k la costante elastica della molla, i moduli di queste due forze sono

$$F_{\text{el}} = k(L - d'), \quad F_{\text{Ar}} = \rho_a V' g,$$

perciò, indicando con V_0 il volume iniziale del palloncino, con V il suo volume finale, e con d la sua profondità finale, si hanno le due equazioni

$$k(L - d_0) = \rho_a V_0 g, \quad k(L - d) = \rho_a V g.$$

Per la legge di Stevino, trascurando la pressione atmosferica, la pressione dell'acqua a una profondità d' vale

$$p' = \rho_a d' g,$$

e, all'equilibrio, questa pressione è la stessa del gas contenuto nel palloncino. Perciò, indicando con n il numero di moli in esso contenute, e con T' la sua temperatura alla profondità d' , per l'equazione di stato dei gas perfetti si ha

$$\rho_a d' g V' = n R T',$$

ossia, nelle situazioni iniziale e finale,

$$\rho_a d_0 g V_0 = n R T_0, \quad \rho_a d g V = n R T.$$

Dalle quattro equazioni scritte, eliminando tutte le incognite fuorché d , si giunge all'equazione

$$\frac{T}{T_0} = \frac{d(L-d)}{d_0(L-d_0)},$$

da cui è immediato trovare

$$d = \frac{L + \sqrt{L^2 + \frac{4T d_0 (d_0 - L)}{T_0}}}{2}.$$

Risposta: 6.3605 m. *Errore massimo consentito:* 0.5%.

PROB. 19 — PENDOLO DI NEWTON DIFETTOSO

Supponiamo che i pendoli giacciano nel piano xy . Siano L_n, L'_n le componenti z del momento angolare totale dei due pendoli rispetto al perno subito prima e subito dopo l'urto n -esimo. Dal momento che nell'istante dell'urto non ci sono forze impulsive esterne che esercitano un momento torcente sul sistema, si avrà

$$L_n = L'_n.$$

Visto che le ampiezze di partenza sono molto piccole ($|\theta_0^{(1)}|, |\theta_0^{(2)}| \ll 1$) e che le ampiezze del moto successivo saranno sicuramente minori di quelle iniziali, possiamo lavorare nel regime di piccole oscillazioni. Dunque, poiché entrambe le sfere vengono lanciate da ferme, esse raggiungeranno $\theta = 0$ nello stesso istante e in tutto il moto successivo gli urti avverranno sempre nel punto più basso della loro traiettoria. Da ciò segue

$$L_{n+1} = -L'_n,$$

che, combinato con la relazione precedente, consente di concludere che

$$|L_n| = |L_{n+1}|.$$

Se v_n, u_n sono le velocità tangenziali delle due sfere subito prima dell'urto n -esimo, allora $L_n = m\ell^2(v_n + u_n)$. Indicando con V la velocità con cui le due sfere, una volta attaccate, passano dall'origine, avremo che

$$m\ell^2|2V| = m\ell^2|(v_1 + u_1)| \Rightarrow |V| = \left| \frac{v_1 + u_1}{2} \right|.$$

Dalla conservazione dell'energia per i due pendoli e dall'identità trigonometrica $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \cos \theta$ segue che

$$v_1 = \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\theta_0^{(1)}}{2}\right) \quad u_1 = \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\theta_0^{(2)}}{2}\right).$$

Se θ è l'ampiezza finale delle oscillazioni, varrà

$$|V| = \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \left| \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\theta_0^{(1)}}{2}\right) + \sqrt{g\ell} \sin\left(\frac{\theta_0^{(2)}}{2}\right) \right| \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \left| \sin\left(\frac{\theta_0^{(1)}}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_0^{(2)}}{2}\right) \right|,$$

da cui

$$\theta = 2 \arcsin\left(\frac{1}{2} \left| \sin \frac{\theta_0^{(1)}}{2} + \sin \frac{\theta_0^{(2)}}{2} \right| \right).$$

Risposta: 1.5000° Errore massimo consentito: 0.5%.

PROB. 20 — MONETINA INTRAPPOLATA —

Chiamiamo m la massa del ghiaccio presente all'equilibrio, e poniamo $T_0 = 0^\circ\text{C}$. La densità media di ghiaccio e monetina all'equilibrio vale

$$\rho = \frac{m + m_c}{\frac{m}{\rho_g} + \frac{m_c}{\rho_c}},$$

e la condizione per la precipitazione è $\rho \geq \rho_a$. Il calore latente di fusione necessario a sciogliere la massa $m_g - m$ di ghiaccio è

$$Q_L = \lambda_f(m_g - m),$$

dove $m_g = 130\text{ g}$. Il calore scambiato dall'acqua inizialmente presente per il passaggio dalla temperatura iniziale T alla temperatura finale T_f vale

$$Q_1 = c_a(T - T_f)\rho_a V,$$

mentre quello assorbito dalla massa $m_g - m$ di ghiaccio sciolta in acqua per passare dalla temperatura T_0 alla temperatura T_f è

$$Q_2 = c_a(T_f - T_0)(m_g - m).$$

La conservazione dell'energia impone allora che si abbia

$$Q_2 + Q_L = Q_1 \Rightarrow T_f = \frac{(m - m_g)\lambda_f + c_a(T\rho_a V + T_0(m_g - m))}{c_a(m_g - m + \rho_a V)}.$$

Affinché sia presente del ghiaccio all'equilibrio, deve essere $T_f = T_0$, da cui si ottiene

$$m = m_g + \frac{c_a \rho_a V (T_0 - T)}{\lambda_f}.$$

Sostituendo quest'espressione in quella per ρ , e imponendo che si abbia $\rho = \rho_a$ nel caso limite, si trova infine l'espressione per T cercata:

$$T = T_0 + \frac{\lambda_f}{\rho_a V c_a} \left(m_g - \frac{\rho_g(\rho_c - \rho_a)}{\rho_c(\rho_a - \rho_g)} m_c \right).$$

Risposta: 6.3833°C Errore massimo consentito: 0.5%.