Problemi del Test di Ammissione

Lo Staff dello Stage*

27 novembre 2024

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono una delle sfide che vi separano dalla possibilità di partecipare allo Stage di Fisica a Pisa 2025. **Leggete attentamente questa introduzione**: vi sarà utile per un approccio corretto al test.

Avete a disposizione dieci giorni per risolvere i problemi, perciò sentitevi liberi di andare a cercare/studiare gli argomenti che non conoscete bene: il test serve anche a questo. Sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo: non servirebbe né a voi, dato che non favorisce l'approccio ad argomenti nuovi in maniera autonoma, né a noi per selezionarvi in modo appropriato, senza contare che c'è anche una prova orale...

Per svolgere i problemi è ammesso l'uso della calcolatrice scientifica e di materiale da disegno, oltre al supporto necessario per produrre effettivamente l'elaborato. Non sono consentiti ulteriori strumenti di calcolo.

I problemi sono stati ordinati grossomodo in ordine crescente di difficoltà. Ovviamente, questa è una valutazione molto soggettiva, quindi vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolverli tutti: potrebbe succedere che alcuni dei problemi più difficili possano risultare facili e viceversa.

Per iscrivervi dovrete inviare un unico file `pdf` con tutte le vostre soluzioni. Potete scriverlo come preferite: LaTeX, Word, fotografando manoscritti... L'importante è che sia perfettamente leggibile. Non potremmo dare alcun punto a ciò che non riusciamo a leggere! La dimensione massima del file unico da caricare sul sito è di 30 Megabyte.

Nel file consegnato, le soluzioni devono essere riportate nello stesso ordine dei corrispondenti problemi e deve essere chiaro a quale quesito si riferiscono!

È necessario spiegare tutti i passaggi svolti, anche parziali, e non riportare solo i risultati finali. Una risposta non giustificata, per quanto corretta, otterrà un punteggio parziale o nullo.

È importante che inviate anche soluzioni incomplete, nel caso non riusciate a risolvere alcuni problemi per intero: in questo caso verranno assegnati punteggi parziali. Inoltre, vi facciamo notare che, per alcuni problemi, è possibile rispondere a qualche richiesta anche senza aver svolto i punti precedenti.

Per eventuali domande rivolgetevi solamente all'indirizzo email segreteria.stagefisica@sns.it. Eventuali correzioni sul testo possono essere annunciate sul sito ufficiale dello stage stagefisica.sns.it.

Ovviamente, sappiamo che i più giovani potrebbero avere lo svantaggio di conoscere meno argomenti: ne terremo conto. Il test è valutato su un totale di 1000 punti. Il punteggio minimo necessario, ma non sufficiente, per poter fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta. Buon lavoro!

*segreteria.stagefisica@sns.it

PROB. 1 — Tre sbarre e una molla - 60 pt.

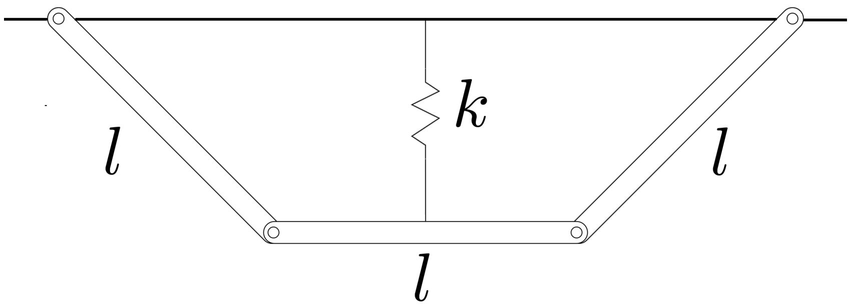

Figura 1: Schema della configurazione nel prob. 1.

Si consideri una guida liscia e orizzontale cui sono appese, ciascuna per un suo estremo, due identiche sbarre di massa m, lunghezza l e dimensioni trasversali trascurabili, come in figura 1. Gli estremi superiori delle sbarre sono liberi di scorrere sulla guida senza attrito. Una terza sbarra, identica alle precedenti, le collega. Ciascuna sbarra ha densità uniforme. Gli estremi di sbarre contigue sono congiunti da snodi ideali: gli angoli tra le sbarre possono variare liberamente, senza che ci sia un momento torcente di richiamo. Una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k collega un punto della guida e il centro della sbarra posta tra le altre due. La costante elastica della molla soddisfa $kl = 4mg$. Nella configurazione di equilibrio considerata, le tre sbarre e la porzione di guida compresa tra di esse formano un trapezio isoscele. In tale situazione, determinare

1. la distanza tra la sbarra centrale e la guida;
2. i moduli delle forze esercitate da ciascuna sbarra laterale su quella centrale.

PROB. 2 — Raggio di luce in un fluido - 60 pt.

Una vasca molto larga ha un pavimento che non riflette la luce. Sul fondo della vasca, un piccolo macchinario emette un raggio di luce che forma un angolo $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ con la verticale. Fuori dalla vasca l'indice di rifrazione dell'aria vale 1.

1. Nella vasca è presente un liquido denso con indice di rifrazione n_1 e spessore h. Al di sopra di esso, c'è un altro strato di un liquido meno denso, anch'esso di spessore h, con indice di rifrazione $n_2 < n_1$. Assumendo che il raggio riesca a uscire dalla vasca, trovare l'angolo che esso forma con la verticale nel tratto in aria.

2. Viene aggiunto un terzo strato sopra al secondo, anch'esso di spessore h, ancora meno denso e con indice di rifrazione $n_3 < n_2$. Trovare l'angolo che il raggio di luce forma con la verticale nel tratto fuori dai liquidi.

3. Supponiamo ora che, nella vasca, siano presenti N strati di N liquidi distinti, di spessori generici $h_1, h_2, \ldots, h_N$ e indici di rifrazione $n_1 > n_2 > \ldots > n_N$. Determinare nuovamente, in funzione di tali parametri, l'angolo che il raggio di luce forma con la verticale una volta emerso dalla vasca.

4. Nella situazione descritta nel punto precedente, detti P il punto dell'interfaccia tra il liquido N−esimo e l'aria, posto sulla verticale passante per il macchinario, e Q il punto di tale interfaccia dal quale emerge il raggio, determinare la distanza tra P e Q in funzione dei parametri forniti.

Nota: nel punto 4 la soluzione può essere espressa in forma di sommatoria, dando però l'espressione del suo termine ennesimo in funzione dei dati del problema.

PROB. 3 — FIONDA GRAVITAZIONALE - 70 PT.

Consideriamo un pianeta di massa M e raggio R, posto molto lontano da ogni altro corpo celeste. Il pianeta non ruota in un sistema di riferimento inerziale.

1. Un oggetto di massa $m_a \ll M$ si trova inizialmente sulla sua superficie. Quale deve essere, come minimo, il modulo della sua velocità iniziale v_0 affinché esso riesca ad allontanarsi indefinitamente dal pianeta?

2. Aggiungiamo alla configurazione precedente un satellite di massa $m \ll M$ e dimensioni trascurabili, che orbita attorno al pianeta su un'orbita circolare di raggio $d > R$. Grazie alla presenza del satellite, è possibile ridurre la minima velocità che è necessario imprimere all'oggetto affinché esso riesca ad allontanarsi indefinitamente dal pianeta: questa tecnica, nota come "effetto fionda", sfrutta l'interazione tra il satellite e l'oggetto, schematizzabile come un urto elastico. Assumendo che $m_a \ll m$, determinare qual è il minimo modulo della velocità v_1 necessario in questo caso.

Nota: le velocità iniziali si intendono sempre riferite a un sistema di riferimento inerziale solidale al pianeta.

PROB. 4 — COEFFICIENTE DI ATTRITO VARIABILE - 80 PT.

Si consideri un piano orizzontale su cui viene fissato un sistema di riferimento cartesiano Oxy. Il coefficiente di attrito, sia statico che dinamico, tra il piano e un determinato materiale, è descritto dalla seguente funzione della coordinata x:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x < 0 \\ kx \text{ se } 0 \le x \le \frac{1}{k} \\ 1 \text{ se } x > \frac{1}{k} \end{cases}$$

dove k è un parametro positivo che ha le dimensioni del reciproco di una lunghezza.

1. Una sfera omogenea di raggio R e massa m, fatta del materiale sopra considerato, si muove inizialmente di puro rotolamento nella zona di piano con $x < 0$, con velocità del centro di massa pari a $v_0\hat{x}$, dove $v_0 > 0$. Successivamente, la sfera entra nella zona con $x \ge 0$. Determinare per quali valori di v_0 il punto di contatto tra sfera e piano riesce a raggiungere la zona di piano con $x > \frac{1}{k}$ entro un tempo finito.

2. Supponiamo invece che, inizialmente, il moto della sfera sia puramente traslatorio, cioè la sfera striscia sul piano, con la stessa velocità del centro di massa del punto precedente. Determinare per quali valori di v_0 il moto della sfera diviene di puro rotolamento prima che il punto di contatto tra essa e il piano entri nella zona di piano con $x > \frac{1}{k}$.

PROB. 5 — Termodinamica all'aria aperta - 90 pt.

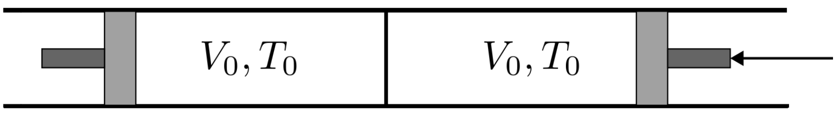

Figura 2: Schematizzazione del prob. 5.

Consideriamo un tubo le cui pareti sono dei perfetti isolanti termici, disposto come in figura 2. Le due basi del tubo sono chiuse da due pistoni, anch'essi termicamente isolanti, liberi di scorrere senza attrito. Il contenitore così ottenuto è separato in due metà da un setto divisorio rigido e inamovibile, ma perfettamente conduttore. Nello scompartimento di sinistra (A) e in quello di destra (B) sono presenti due quantità di gas perfetto monoatomico. Inizialmente, entrambi i gas occupano un volume V_0, sono a temperatura T_0, e il sistema è all'equilibrio termico e meccanico. La pressione esterna è, da ambo i lati, quella atmosferica p_0. Da un certo istante, lasciando libero il pistone di sinistra, si esercita una forza variabile su quello di destra, in modo che esso si muova lentamente facendo variare i due volumi V_A e V_B e la temperatura T. Detti $\tau_A = \frac{\mathrm{d}V_A}{\mathrm{d}t}$ e $\tau_B = \frac{\mathrm{d}V_B}{\mathrm{d}t}$ i tassi istantanei di variazione dei due volumi, si esprima il rapporto τ_A/τ_B unicamente in funzione del valore istantaneo di T e dei parametri del sistema forniti precedentemente.

PROB. 6 — URTI SUCCESSIVI - 110 PT. ———

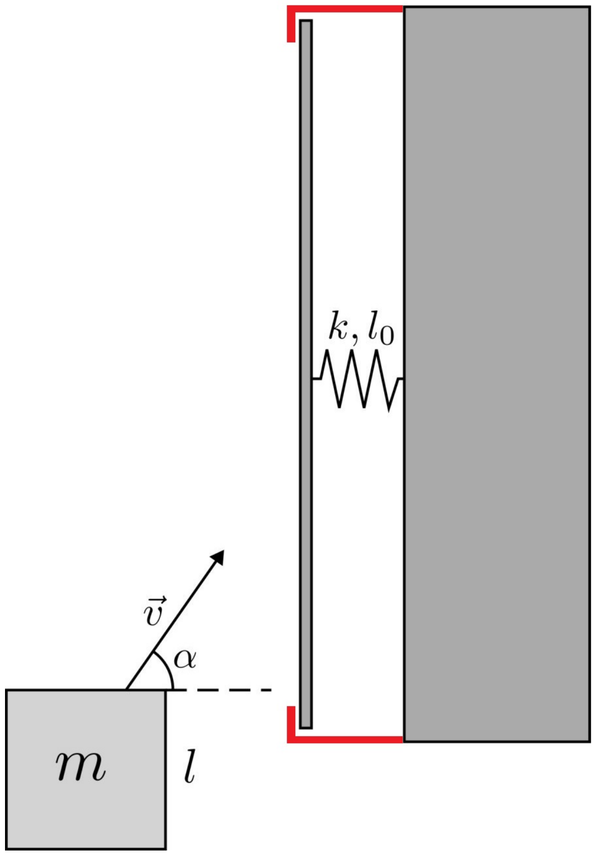

Figura 3: Configurazione del prob. 6.

Una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo $\ell_0 > 0$ è fissata con un'estremità a un muro, e con l'altra a una piastra verticale. Il pavimento coincide col piano del foglio. La piastra è libera di oscillare senza attrito in direzione perpendicolare al muro, ma è vincolata a rimanere sempre parallela ad esso. Un cubo di massa m e lato ℓ, libero di scivolare senza attrito sul pavimento, viaggia con una velocità iniziale $\vec{v}$ che forma un angolo α con la direzione perpendicolare al muro, come in figura 3. Il coefficiente di attrito tra cubo e piastra è μ. La massa della piastra è trascurabile rispetto ad m, mentre le sue dimensioni sono molto maggiori di ℓ. Durante tutto il problema si assuma che il cubo non ruoti e che due delle sue facce rimangano sempre parallele al muro. Inoltre, la presenza di due blocchi, raffigurati in rosso, fa sì che la lunghezza della molla non diventi mai maggiore di ℓ_0. Questo implica che, durante l'urto prolungato tra piastra e cubo, i due oggetti rimangono in contatto finché la molla non ritorna nella posizione di riposo. Una volta che la lunghezza della molla riassume il valore ℓ_0, il cubo si stacca e inizia a muoversi di moto rettilineo uniforme sul pavimento.

Inizialmente si vuole studiare l'urto tra il cubo e il sistema piastra-molla. Si supponga che v sia sufficientemente piccola da far sì che la piastra non arrivi mai a toccare il muro.

1. Trovare la velocità $\vec{v}'$ del cubo dopo che si è distaccato dalla piastra, al variare di α tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Quanto vale l'angolo α' tra $\vec{v}'$ e la perpendicolare al muro?

Finché i valori di k, v sono tali per cui $mv^2 \ll k\ell_0^2$, il sistema sopra descritto può essere utilizzato come modello per l'urto del cubo con un muro scabro. Si consideri il caso in cui ci siano due muri identici a quello appena descritto, con molle e piastre annesse, paralleli tra di loro e a distanza $d \gg \ell, \ell_0$ l'uno dall'altro, come mostrato in figura 4. Sia nuovamente $\vec{v}$ la velocità iniziale del cubo e α l'angolo che questa forma con la normale ai due muri. Il cubo parte adiacente al muro destro e si avvicina a quello sinistro.

2. Trovare il tempo totale trascorso dal momento della partenza fino all'istante in cui la componente x della velocità del cubo si annulla.

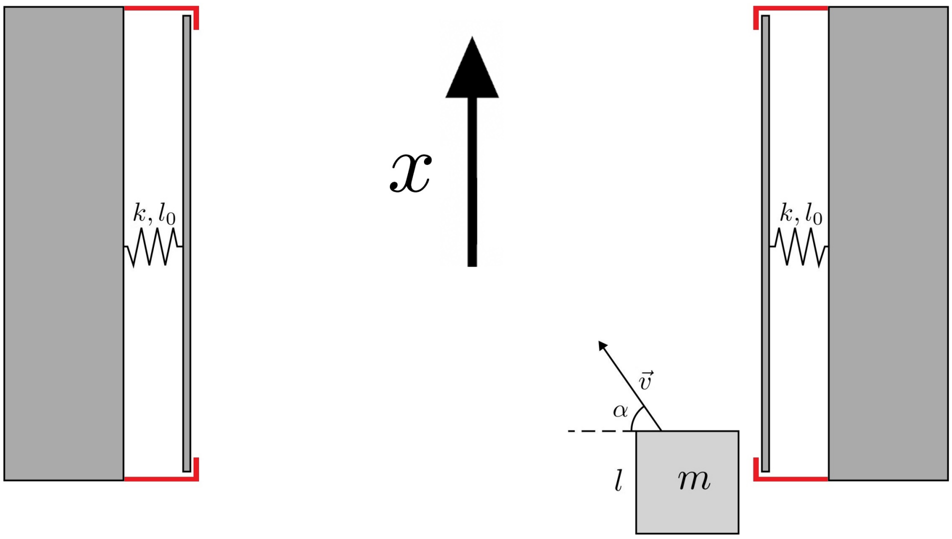

Figura 4: Cubo tra due muri.

PROB. 7 — Oscillatore H_2O - 115 PT. ——

In una bacinella a forma di parallelepipedo di lati $2D \times L \times L$, dove $D \ll L$, è presente una parete mobile quadrata di lato L, massa $M \gg L^2 D \cdot \rho_{\text{acqua}}$ e spessore trascurabile, parallela alle facce di area L^2. La bacinella poggia a terra su una delle sue facce di area $2DL$ in modo che le facce di area L^2 siano verticali, come mostrato in figura 5. Il lato di lunghezza $2D$ è stato esagerato nella figura, ma è importante ricordarsi che $D \ll L$. Inizialmente, la parete mobile è posta in modo che la bacinella sia divisa esattamente in due metà uguali. I due scompartimenti della bacinella vengono riempiti fino a metà altezza con dell'acqua, in modo che la parete sia in equilibrio meccanico. La parete è, però, libera di scorrere senza attrito nella direzione ortogonale ad essa, cioè lungo il lato di lunghezza $2D$. Si assuma che la parete mobile si mantenga sempre parallela alle facce di area L^2 e che il liquido non possa passare da uno scompartimento all'altro.

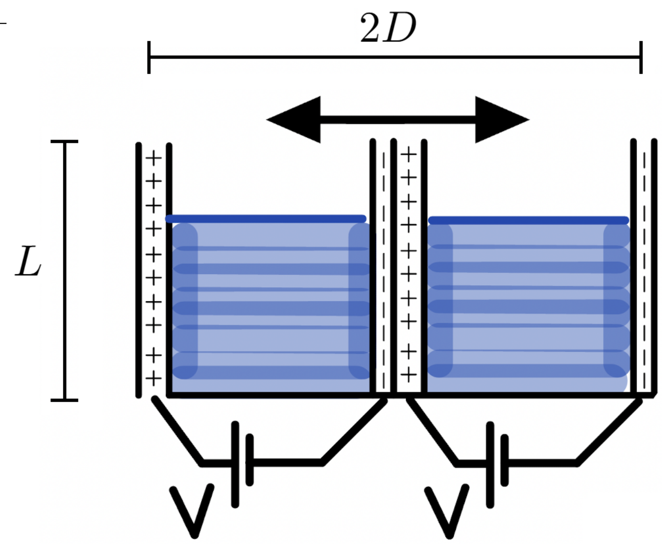

Figura 5: Configurazione nel prob. 7.

1. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni della parete quando questa viene spostata di una quantità infinitesima dalla posizione di equilibrio, compatibilmente con le assunzioni fatte precedentemente;

2. L'acqua viene sostituita con un liquido dielettrico di costante dielettrica relativa ε_r e densità $\rho \ll \frac{M}{L^2 D}$. Inoltre, sulle due basi del parallelepipedo e sulla parete mobile vengono poste delle armature metalliche quadrate di lato L, in modo da costruire due condensatori a facce piane e parallele. Tra le armature di ciascun condensatore è mantenuta una differenza di potenziale V costante, grazie a due generatori esterni. La parete viene nuovamente spostata orizzontalmente dalla posizione di equilibrio iniziale, di una quantità infinitesima. Calcolare il periodo delle piccole oscillazioni, supponendo che V sia abbastanza piccolo, rispetto agli altri parametri rilevanti del sistema, da permettere le oscillazioni.

Nota Bene: i moto ondosi dell'acqua e del liquido dielettrico sono trascurabili, il moto è sufficientemente lento da poter considerare il campo elettrico come un campo elettrostatico.

Può essere utile l'approssimazione $(1+x)^k \approx 1+kx$, valida per $|kx| \ll 1$.

PROB. 8 — TRIANGOLO CARICO - 115 PT. —

Tre fili rettilinei di lunghezza infinita, ognuno con densità lineare di carica uniforme $\lambda > 0$, vengono posti nel piano xy, in modo che i tre punti di intersezione, ognuno relativo a una delle tre coppie di fili, siano i vertici di un triangolo equilatero di lato a. Il centro del triangolo coincide con l'origine O di un sistema di coordinate e uno dei tre fili è parallelo all'asse x. Un punto materiale di carica $q > 0$ e massa m viene posto in O.

1. La carica puntiforme è libera di muoversi in tutto lo spazio. Mostrare che O è un punto di equilibrio per q. L'equilibrio è stabile o instabile?

2. La carica puntiforme viene adesso vincolata a muoversi solo nel piano xy. Rispondere nuovamente alla domanda precedente per spostamenti infinitesimi compatibili con il vincolo, cioè unicamente lungo il piano xy. Nel caso in cui l'equilibrio sia stabile, calcolare il periodo delle piccole oscillazioni della particella in seguito a uno spostamento infinitesimo lungo l'asse y.

Può essere utile l'espansione notevole $\ln(1+x) \approx x$, valida se $|x| \ll 1$.

PROB. 9 — Bolla nel vuoto - 140 pt. —

Una bolla sferica di raggio r_0, contenente n moli di un gas perfetto monoatomico, fluttua all'interno della Stazione Spaziale Internazionale. La bolla è in equilibrio meccanico e termico con l'aria circostante, la cui pressione è p_0. La tensione superficiale della bolla[1] è γ. A un certo punto, la pressione dell'aria circostante viene rapidamente abbassata fino a raggiungere, in buona approssimazione, il valore di quella del vuoto. Conseguentemente, la bolla inizia a espandersi velocemente fino a raggiungere un nuovo stato di equilibrio. L'abbassamento della pressione esterna avviene in un tempo molto piccolo rispetto a quello in cui la bolla si espande.

1. Trovare il raggio r_1 della bolla nel nuovo stato di equilibrio, supponendo che, durante l'espansione, gli scambi di calore con l'aria circostante siano trascurabili;

In seguito, la bolla, sempre all'interno della SSI, viene esposta alla luce solare e inizia ad assorbire calore per irraggiamento. Di conseguenza, il suo raggio cambia progressivamente, finché non viene nuovamente raggiunto l'equilibrio. In questa fase, la bolla può essere considerata come un corpo grigio con coefficiente di assorbimento ε.

2. Trovare il raggio r_2 che raggiunge la bolla nel nuovo stato di equilibrio ed esprimere la velocità di variazione del raggio della bolla $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ in funzione del raggio stesso $r(t)$ e delle altre grandezze date, nell'intervallo di tempo in cui essa viene riscaldata.

Trascurare l'evaporazione del liquido all'interfaccia tra esso e i gas dentro e fuori la bolla. Il Sole è approssimabile a una sfera che irraggia una potenza P_S in modo isotropo. La distanza della Stazione Spaziale Internazionale dal Sole è approssimabile alla distanza Terra-Sole, indicata con d. Assumere che il processo di riscaldamento della bolla sia sufficientemente lento da poter essere considerato quasistatico.

[1] Non è rilevante ai fini del problema, ma qui bisognerebbe essere più precisi: in generale, la tensione superficiale dipende non solo dal liquido che compone la parete della bolla ma anche dal gas a contatto con la parete. In questo caso, però, il gas dentro la bolla è diverso da quello fuori, ma assumiamo che la tensione superficiale delle due interfacce (interna ed esterna) sia la stessa, indicata con γ.

PROB. 10 — Circuito con Cella di Peltier - 160 pt.

Una cella di Peltier è un dispositivo termoelettrico costituito da due piastre parallele separate da un gran numero di blocchi semiconduttori ed è in grado di convertire energia elettrica in calore: applicando una differenza di potenziale ai terminali della cella, questa indurrà un trasferimento di calore da una piastra all'altra, il cui verso dipende dalla polarità della tensione applicata. Essa può inoltre, lavorare in modalità inversa, generando una forza elettromotrice a partire dal flusso di calore tra le piastre: qualora ci fosse una differenza di temperatura tra le due facce della cella, parte del calore trasferito da una piastra all'altra verrebbe convertito in energia elettrica, ad esempio immessa in un circuito. La figura 6 mostra schematicamente l'elemento descritto.

Il comportamento della cella può essere così descritto: la f.e.m. generata tra i due terminali è data da

$$\mathcal{E} = \alpha\left(T_2 - T_1\right),$$

dove $\alpha > 0$ è una costante caratteristica della cella, mentre T_2 e T_1 sono le temperature delle due facce. I terminali positivo e negativo rappresentati in figura corrispondono a $\mathcal{E} > 0$.

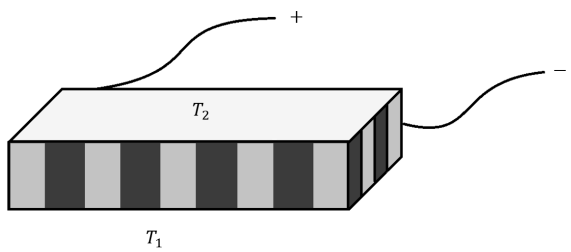

Figura 6: Rappresentazione schematica di una cella di Peltier.

Si vuole studiare il comportamento della cella in varie condizioni. Si pone la faccia superiore a contatto con un corpo di capacità termica C e a temperatura T, che scambia calore solo con la cella, e la faccia inferiore a contatto con un bagno termico la cui temperatura è mantenuta costante e pari a T_0. Inizialmente, i terminali della cella vengono collegati a una resistenza R, come in figura 7. La potenza che la cella assorbe dal corpo a temperatura T è data da

$$P = \alpha T I,$$

dove I è la corrente che scorre nel circuito, il cui segno positivo corrisponde al verso rappresentato in figura, ossia dal terminale positivo a quello negativo. Parte di questa energia viene immessa nel circuito e parte viene trasferita al corpo inferiore.

Infine, si verifica anche un trasferimento spontaneo di calore da un corpo all'altro dovuto alla conduzione termica della cella, dato da

$$P_t = k\left(T - T_0\right),$$

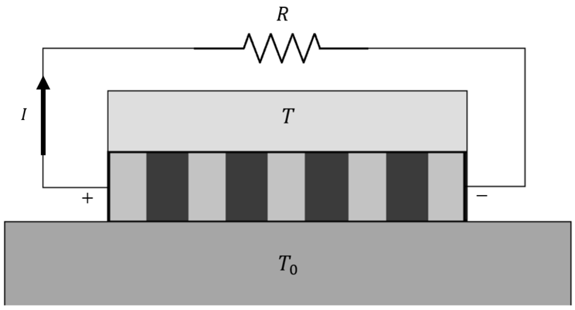

Figura 7: Schematizzazione di una cella Peltier con una resistenza.

dove k è una costante nota. La potenza totale trasferita dal corpo superiore è data da $P + P_t$, che è positiva se esso cede calore e negativa se lo assorbe.

1. Calcolare la potenza che la cella immette nel circuito e la potenza trasferita al corpo inferiore a temperatura T_0 quando il circuito è chiuso, il corpo superiore si trova a temperatura T e nel circuito scorre una corrente I.

2. Si consideri ora la resistenza interna della cella, che verrà chiamata R_0. Se al tempo $t = 0$ il circuito viene chiuso e il corpo superiore si trova a temperatura $T = T_i > T_0$, calcolare l'andamento della temperatura del corpo superiore $T(t)$ in funzione del tempo, di T_0, T_i, C, R e delle caratteristiche della cella. Può essere utile definire la costante $B \equiv \frac{k(R+R_0)}{\alpha^2}$ ed esprimere $T(t)$ in funzione di essa.

3. Ora si scollega la resistenza R e si porta il corpo superiore a una temperatura T tale che $T > T_0$ e $\frac{T-T_0}{T_0} \ll 1$. Al contempo si collega il circuito a un'induttanza L, come in figura 8. In tal modo sono osservabili piccole oscillazione termiche smorzate. Scrivere l'equazione differenziale per $T(t)$.

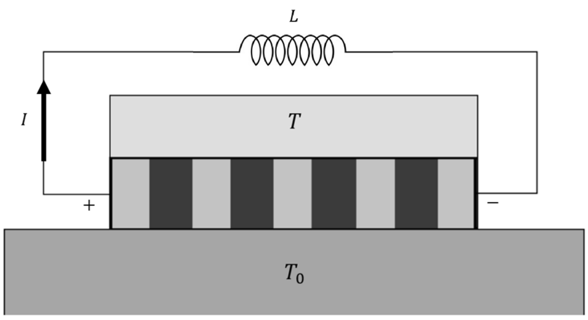

Figura 8: Schematizzazione di una cella Peltier con un'induttanza.

4. Ponendo $T(t) = T_0 + \delta(t)$, dove $|\delta(t)| \ll T_0$ ad ogni istante, semplificare l'equazione differenziale trovata al punto precedente e ricavare la frequenza delle piccole oscillazioni smorzate, trascurando i termini di ordine superiore al primo e supponendo R_0 e k sufficientemente piccoli da garantire la presenza di oscillazioni.