

Soluzioni dei problemi del test di ammissione

Lo staff dello stage*

20 novembre 2023

1 Cilindro equilibrato — 40 pt.

Definisco α l'angolo che la congiungente tra l'asse del cilindro e il suo centro di massa forma con la verticale. L'angolo scelto determina in maniera univoca il posizionamento del cilindro.

1. Il testo richiede di trovare le posizioni di equilibrio del cilindro, dunque si tratta di un problema di statica; essendo il cilindro un corpo esteso, dobbiamo imporre due condizioni: la prima è che la somma vettoriale delle forze applicate sul cilindro sia nulla ($\sum \vec{F}_i = \vec{0}$), la seconda è che la somma vettoriale di tutti i momenti torcenti generati da tali forze rispetto a un qualsiasi polo sia nulla ($\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$). Le forze applicate sul cilindro sono le forze di attrito statico \vec{F}_a , la forza normale \vec{N} (applicate dal pavimento) e la forza peso $m\vec{g}$. Ci si può rendere presto conto che, essendo il piano molto ruvido e indeformabile, \vec{F}_a e \vec{N} possono avere un modulo qualsiasi e quindi la condizione

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

può essere soddisfatta indipendentemente dall'angolo α di inclinazione del cilindro. A definire le condizioni di stabilità sarà quindi la seconda condizione

$$\sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Sapendo che la validità di questa condizione non dipende dalla scelta del polo, possiamo sceglierlo in maniera furba in modo che quanti più termini di quella somma siano nulli. In particolare sappiamo che \vec{N} e \vec{F}_a sono applicate al punto di contatto tra il cilindro e il piano, quindi

*segreteria.stagefisica@sns.it

scegliamo questo punto come polo in modo tale che l'unico contributo potenzialmente non nullo sia quello della forza peso. La condizione si riduce quindi, una volta definito il vettore spostamento tra il punto di contatto e il centro di massa \vec{r}_{cm} , ad annullare il contributo $\vec{r}_{\text{cm}} \times m\vec{g}$, che è nullo solo quando il centro di massa si trova sulla verticale passante per il punto di contatto. La condizione di equilibrio è quindi $r \sin \alpha = R \sin \theta$, che è soddisfatta dagli angoli seguenti:

$$\alpha_1 = \arcsin \left(\frac{R \sin \theta}{r} \right), \quad \alpha_2 = \pi - \arcsin \left(\frac{R \sin \theta}{r} \right).$$

2. Per rispondere a questo punto è necessario considerare anche il valore del coefficiente di attrito statico μ tra il cilindro e il piano inclinato. Da un lato si ha, dal punto precedente, la condizione $R \sin \theta \leq r$ perché esista l'arcoseno. Dall'altro, l'equilibrio delle forze nelle direzioni parallela e perpendicolare al piano dà

$$N = mg \cos \theta, \quad F_a = mg \sin \theta$$

Perciò deve essere $\tan \theta \leq \mu$. Mettendo tutto assieme si trova quindi $\theta_{\text{lim}} = \min\{\arctan \mu, \arcsin \left(\frac{r}{R} \right)\}$.

2 Pendolo su un piano inclinato — 40 pt.

Risolveremo le due parti del problema con due approcci diversi, per essere più didattici.

1. Le forze che agiscono sulla massa, per la prima parte, sono tre:
 - la forza peso, che è sempre uguale a $m\vec{g}$;
 - la reazione vincolare del piano \vec{N} , che è sempre normale al piano;
 - la tensione del filo \vec{T} , che giace sempre su un piano parallelo al piano inclinato.

Queste forze sono disegnate sul diagramma in fig. 1. Dato che la pallina si muove sul piano, senza sprofondare o staccarsi da esso, otteniamo la condizione di equilibrio lungo la normale al piano

$$N = mg \cos \theta.$$

A questo punto, il moto rotatorio è dato dall'altra componente del peso. Scrivendo la seconda legge della dinamica lungo la direzione tangente l'arco di circonferenza descritto dal pendolo, otteniamo

$$F = ma \Rightarrow -mg \sin \theta \sin \alpha = ma = mL \frac{d^2 \alpha}{dt^2}.$$

Dato che siamo interessati al regime di piccole oscillazioni, cioè $|\alpha| \ll 1$, possiamo approssimare l'argomento del seno, $\sin \alpha \approx \alpha$, per cui l'equazione del moto è

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} = -\frac{g \sin \theta}{L} \alpha,$$

che è l'equazione del moto di un pendolo, il cui periodo si può leggere nell'unico coefficiente che compare in questa equazione:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g \sin \theta}}.$$

Notiamo che per $\theta = \pi/2$ ritroviamo il risultato noto per il pendolo semplice.

2. Per la seconda parte del problema useremo un approccio diverso. Quasi tutto ciò che è stato detto fino ad adesso vale ancora, ma ora è presente una forza in più, cioè la forza di attrito fra la sfera e il piano che permette alla sfera di rotolare senza strisciare. Quest'ultima non compie lavoro, perciò, come nel caso precedente, l'energia meccanica è conservata. Possiamo quindi scrivere l'energia totale del sistema

$$E = \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\text{cm}}^2 + U_g,$$

in cui abbiamo usato un teorema di König per scomporre l'energia del corpo rigido come somma di una componente dovuta al solo movimento del centro di massa e di una componente rotazionale attorno al centro di massa. Il termine U_g è invece il potenziale gravitazionale, il potenziale dell'unica forza che compie lavoro in questo sistema. Cerchiamo ora di esprimere tutto in funzione della variabile indipendente α . Notiamo intanto che vale la relazione

$$v_{\text{cm}} = L \frac{d\alpha}{dt},$$

per semplici motivi geometrici. Inoltre, la relazione di rotolamento senza strisciamento implica che il punto di contatto fra sfera e piano sia

istantaneamente fermo. Questo vuol dire che la somma dei contributi di traslazione e rotazione intorno al centro di massa deve annullarsi, relazione che si traduce in

$$v_{\text{cm}} + \omega_{\text{cm}} r = 0.$$

Infine, con un po' di geometria si trova facilmente

$$U_g = -mgL \sin \theta \cos \alpha.$$

Mettendo insieme i pezzi, possiamo scrivere l'espressione dell'energia

$$E = \frac{1}{2}(1 + \beta)mL^2 \left(\frac{d\alpha}{dt} \right)^2 - mgL \sin \theta \cos \alpha.$$

Sapendo che l'energia si conserva, possiamo porre la derivata prima dell'energia rispetto al tempo uguale a zero. Con questo trucco, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{dt} = mL^2(1 + \beta) \frac{d\alpha}{dt} \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL \sin \theta \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt} \\ &= \left(mL^2(1 + \beta) \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgL \sin \theta \sin \alpha \right) \frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned}$$

che è soddisfatta in due casi: se il sistema è fermo, quindi la velocità è nulla, oppure vale l'equazione del moto

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g \sin \theta}{L(1 + \beta)} \sin \alpha,$$

che è sempre l'equazione di un pendolo, ma di lunghezza efficace diversa. Il periodo risulta infine pari a

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L(1 + \beta)}{g \sin \theta}}.$$

Notiamo che per $\beta = 0$ recuperiamo il caso precedente.

3 Trasporto di calore — 50 pt.

Premessa

Il trasferimento di calore segue la legge di Fourier:

$$Q = \frac{kS\Delta T\Delta t}{h},$$

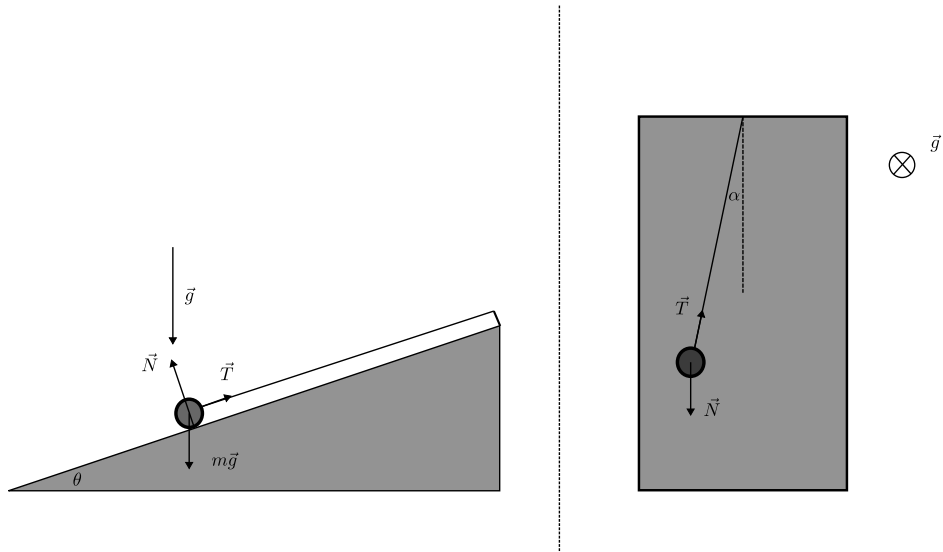


Figura 1: Schema delle forze nel problema 2.

dove Q è il calore trasferito tra due superfici parallele distanti h in un tempo Δt , k la conducibilità termica del materiale tra di esse, S la sezione costante del materiale, ΔT la differenza di temperatura tra le due superfici.

Questa legge è valida se il materiale è uniforme e permette di affermare che il sistema della domanda 1 ha come possibile condizione stazionaria quella in cui ogni sezione della sbarretta parallela alle basi è a temperatura uniforme. Infatti, in questa situazione il calore scorre solo nella direzione ortogonale a tali basi e ci si può ricondurre a risolvere il problema in una dimensione.

Anche nella domanda 3 si ha che questa situazione è di equilibrio, ma non è ovvio che sia unica e che quindi il sistema finisca in questa condizione (con le sezioni a temperatura uniforme) indipendentemente dalle condizioni iniziali.

Per convincersi che ci può essere solo una condizione di equilibrio stazionaria, si può pensare al fatto che l'equazione del calore (legge di Fourier) è lineare, quindi la differenza di soluzioni è soluzione anch'essa una soluzione. Si supponga quindi che esista un'altra soluzione stazionaria al problema diversa in almeno un punto dalla precedente. Sottraendo punto per punto la temperatura di questa nuova soluzione e di quella sopra descritta si ottiene un sistema con le estremità alla stessa temperatura, ma che ha almeno due punti interni a temperature diverse. Questo è assurdo perché il punto più freddo di tutto il sistema può solo ricevere calore (parimenti quello più caldo può solo cederlo), quindi la soluzione non può essere stazionaria. Ne consegue che l'ipotesi di un'altra soluzione è assurda, dunque la soluzione di cui sopra

è l'unica al problema.

1. Assumendo senza perdita di generalità che $T_A < T_B$, sappiamo che il calore che si sposta dal lato più caldo a temperatura T_B fino a qualsiasi punto x della sbarretta deve essere uguale al calore che va da questo punto x fino al lato della sbarretta alla temperatura più bassa T_A .

Data la premessa sopra, si può applicare la legge di Fourier considerando le sezioni parallele alle basi come isoterme.

Assegnando l'origine delle coordinate nel lato della sbarretta a temperatura T_A e il valore h_1 nel lato a temperatura T_B , si può imporre l'equilibrio termico per ogni punto (a temperatura $T(x)$) tra le due superfici:

$$\begin{aligned}\frac{k_1 S \Delta t (T(x) - T_A)}{x} &= \frac{k_1 S \Delta t (T_B - T(x))}{h_1 - x} \\ \Rightarrow \frac{T(x) - T_A}{x} &= \frac{T_B - T(x)}{h_1 - x} \\ \Rightarrow T(x) h_1 &= T_A (h_1 - x) + T_B x \\ \Rightarrow T(x) &= \frac{T_B - T_A}{h_1} x + T_A.\end{aligned}$$

2. Innanzitutto, proviamo a trovare la temperatura che ha la superficie di contatto tra le due sbarrette, chiamiamola T_M . Il calore che si trasmette dal lato a temperatura T_B fino alla superficie di temperatura T_M è uguale al calore che si trasmette dalla superficie a temperatura T_M fino al lato a temperatura T_A :

$$\begin{aligned}\frac{k_1 (T_M - T_A)}{h_1} &= \frac{k_2 (T_B - T_M)}{h_2} \\ \Rightarrow T_M (k_1 h_2 + k_2 h_1) &= k_1 T_A h_2 + k_2 T_B h_1 \\ \Rightarrow T_M &= \frac{k_1 T_A h_2 + k_2 T_B h_1}{k_1 h_2 + k_2 h_1}.\end{aligned}$$

Ora, ragionando nello stesso modo della domanda 1, ognuna delle due sbarrette si comporta come se fossero separate, una di lunghezza h_1 con un lato a temperatura T_A e l'altro a temperatura T_M e un'altra sbarretta di lunghezza h_2 con un lato a temperatura T_M e l'altro a temperatura T_B . Quindi il profilo di temperatura deve consistere in due rette che sono unite nel punto $T(h) = T_M$:

$$T(x) = \begin{cases} T_A + \frac{T_M - T_A}{h_1}x & \text{se } 0 \leq x \leq h_1 \\ T_M + \frac{T_B - T_M}{h_2}(x - h_1) & \text{se } h_1 \leq x \leq h_1 + h_2 \end{cases}$$

Per calcolare la conducibilità termica efficace uguagliamo il flusso di calore del nostro sistema al flusso di calore di una sbarretta di lunghezza $h_1 + h_2$ e di sezione S di un materiale omogeneo:

$$\begin{aligned} \frac{k_1(T_M - T_A)S\Delta t}{h_1} &= \frac{k_{\text{ser}}(T_B - T_A)S\Delta t}{h_1 + h_2} \\ \Rightarrow \frac{k_1(T_M - T_A)}{h_1} &= \frac{k_{\text{ser}}(T_B - T_A)}{h_1 + h_2} \\ \Rightarrow \frac{k_1\left(\frac{k_1T_A h_2 + k_2T_B h_1}{k_1 h_2 + k_2 h_1} - T_A\right)}{h_1} &= \frac{k_{\text{ser}}(T_B - T_A)}{h_1 + h_2} \\ \Rightarrow \frac{k_1(T_B - T_A)k_2 h_1 (h_1 + h_2)}{h_1(k_1 h_2 + k_2 h_1)} &= k_{\text{ser}}(T_B - T_A) \\ \Rightarrow k_{\text{ser}} &= \frac{k_1 k_2 (h_1 + h_2)}{k_1 h_2 + k_2 h_1}. \end{aligned}$$

3. All'equilibrio si trova una situazione identica a quella descritta nella soluzione alla domanda 1. Per convincersene si può notare che se si prendono le due sbarrette separate in condizione di equilibrio (quella descritta nella domanda 1) e si mettono nella disposizione descritta nella domanda 3, l'equilibrio è preservato. Il motivo è che nel profilo di temperatura descritto nella soluzione alla domanda 1 non importa il valore della conducibilità termica. L'unicità della soluzione all'equilibrio è spiegata nella premessa.

Per calcolare la conducibilità termica efficace uguagliamo il calore trasmesso dal lato a temperatura T_A fino al lato a temperatura T_B al calore che si trasmetterebbe sempre da un lato a temperatura T_A fino a un lato a temperatura T_B , ma in una sbarretta di sezione $2S$ e lunghezza h_1 fatta di un materiale omogeneo di conducibilità termica k_{ser} :

$$\begin{aligned}
\Delta t \left(\frac{Sk_1(T_B - T_A)}{h_1} + \frac{Sk_2(T_B - T_A)}{h_1} \right) &= \Delta t \left(\frac{2Sk_{\text{ser}}(T_B - T_A)}{h_1} \right) \\
\Rightarrow \frac{Sk_1(T_B - T_A)}{h_1} + \frac{Sk_2(T_B - T_A)}{h_1} &= \frac{2Sk_{\text{ser}}(T_B - T_A)}{h_1} \\
\Rightarrow k_1 + k_2 &= 2k_{\text{ser}} \\
\Rightarrow k_{\text{ser}} &= \frac{k_1 + k_2}{2}.
\end{aligned}$$

4 Corda massiva su un cuneo — 60 pt.

1. Data la simmetria del problema ci limitiamo a considerare il caso $x \geq L$. Sui due tratti di corda agiscono la forza peso, gli attriti e le reazioni normali ai piani del cuneo, Indicando con P_d e P_s le componenti del peso parallele rispettivamente al lato destro e sinistro, abbiamo che

$$P_d = \rho g x \cos \alpha \qquad P_s = \rho g(2L - x) \cos \alpha.$$

La forza peso totale agente lungo la direzione della corda è, quindi, pari a

$$F_{\text{tot}} = P_d - P_s = 2\rho g(x - L) \cos \alpha.$$

Le forze normali N_d e N_s devono bilanciare le componenti perpendicolari del peso, pertanto

$$N_d = \rho g x \sin \alpha \qquad N_s = \rho g(2L - x) \sin \alpha,$$

da cui si ricava la massima forza di attrito possibile

$$A = (N_d + N_s)\mu = 2\mu\rho gL \sin \alpha.$$

Imponendo il bilancio totale delle forze si ottiene

$$F_{\text{tot}} \leq A \Rightarrow 2\rho g(x - L) \cos \alpha \leq 2\mu\rho gL \sin \alpha \Rightarrow x \leq L(1 + \mu \tan \alpha).$$

Per la simmetria di cui sopra abbiamo, pertanto, che l'equilibrio si ha per

$$L(1 - \mu \tan \alpha) \leq x \leq L(1 + \mu \tan \alpha).$$

2. In virtù del risultato del punto precedente, è immediato vedere che per avere equilibrio per ogni $0 \leq x \leq 2L$ è sufficiente che sia

$$L(1 + \mu \tan \alpha) \geq 2L \Rightarrow \mu \geq \cot \alpha.$$

5 Lento processo termodinamico — 70 pt.

1. Denotiamo con p_A, p_B, V_A, V_B le pressioni e i volumi nei due scompartimenti. Dal momento che il pistone è mosso da un agente esterno, le due pressioni non saranno necessariamente uguali: per questo motivo sarà necessario compiere lavoro per portare il sistema allo stato finale. Il lavoro infinitesimo svolto dall'esterno sarà

$$\delta L = -p_A dV_A - p_B dV_B.$$

Applicando la legge dei gas perfetti, si ha

$$p_A V_A = p_B V_B = nRT \Rightarrow \delta L = -nRT \left(\frac{dV_A}{V_A} + \frac{dV_B}{V_B} \right),$$

dove T è la temperatura istantanea del sistema. D'altra parte, il sistema non scambia calore con l'esterno, quindi il lavoro esterno sarà pari alla variazione di energia infinitesima totale dei due gas:

$$U_A = U_B = \frac{3}{2}nRT \Rightarrow \delta L = dU_A + dU_B = \frac{3}{2}nRdT + \frac{3}{2}nRdT = 3nRdT.$$

Uguagliando le due espressioni per δL si trova dunque

$$3nRdT = -nRT \left(\frac{dV_A}{V_A} + \frac{dV_B}{V_B} \right) \Rightarrow 3 \frac{dT}{T} = -\frac{dV_A}{V_A} - \frac{dV_B}{V_B}.$$

Integrando dallo stato finale a quello iniziale, ricordando che i valori finali di V_A e V_B sono $\frac{2}{3}V_0$ e $\frac{1}{3}V_0$, si trova

$$\begin{aligned} 3 \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} &= 3 \ln \frac{T_f}{T_0}, \\ \int_{V_0/2}^{2V_0/3} \frac{dV_A}{V_A} &= \ln \frac{4}{3}, \\ \int_{V_0/2}^{V_0/3} \frac{dV_B}{V_B} &= \ln \frac{2}{3}, \\ \Rightarrow 3 \ln \frac{T_f}{T_0} &= -\ln \frac{8}{9} \Rightarrow T_f = \frac{3^{3/2}}{2} T_0. \end{aligned}$$

2. Dal momento che tutte le trasformazioni del sistema sono quasistatiche e che non viene scambiato calore con l'esterno, ci aspettiamo che la variazione totale di entropia sia nulla. Dal momento che l'entropia è una funzione di stato estensiva, si avrà

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B.$$

La variazione infinitesima di entropia è, per definizione

$$dS_A = \frac{\delta Q_A}{T_A},$$

$$dS_B = \frac{\delta Q_B}{T_B},$$

ma in ogni istante $T_A = T_B = T$, visto che il sistema è all'equilibrio; tutto il calore rilasciato dal gas B sarà assorbito dal gas A per ipotesi di isolamento termico, quindi

$$\delta Q_A + \delta Q_B = 0 \Rightarrow dS = dS_A + dS_B = \frac{\delta Q_A + \delta Q_B}{T} = 0.$$

Visto che in ogni istante si ha $dS = 0$, anche la variazione complessiva di entropia ΔS sarà nulla.

6 Fagiolo nella ciotola — 90 pt.

1. Tracciamo lo schema delle forze in fig. 3. Sulla ciotola agiscono la forza peso $M\vec{g}$, la reazione vincolare ciotola-piano \vec{N}_π e ciotola-massetta \vec{N} . Sulla massa agiscono solo la forza peso $m\vec{g}$ e la reazione massetta-ciotola, che, per il terzo principio della dinamica vale $-\vec{N}$. La risultante delle forze sulla ciotola è orizzontale giacché ogni componente verticale viene annullata da \vec{N}_π . Per la conservazione dell'energia, la massa non può superare l'altezza da cui è partita: il distacco può solo avvenire con $0 \leq \theta \leq \pi$.

Applichiamo la **condizione di distacco**: la massa perde contatto con la ciotola quando

$$\vec{N} = \vec{0}.$$

Notiamo che $\vec{N}(t, \theta(t))$ è una funzione continua e regolare.

All'istante del distacco sulla ciotola agiscono solo forze dirette verticalmente, quindi la risultante è nulla e il sistema riferimento della ciotola

è inerziale. Mettiamoci dunque in tale sistema di riferimento. Poco prima del distacco il moto della massetta è circolare, di raggio R e con concavità verso l'alto. Poco dopo è parabolico con concavità diretta verso il basso siccome l'unica forza agente sarebbe $m\vec{g}$. Per la continuità di \vec{N} , dovremmo raccordare le due traiettorie, come in figura 2. Tuttavia non c'è modo di effettuare questa operazione in modo che la massetta non rientri immediatamente in contatto con la ciotola a causa della differenza di concavità. Quindi la massetta resta in contatto con la ciotola.

2. Cominciamo a scrivere il vettore spostamento della massetta: da considerazioni di natura geometrica, si ricava

$$\Delta\vec{x}_m = (\Delta x_M + R(1 - \cos \theta), -R \sin \theta)$$

e, derivando, si ottiene la velocità della massetta:

$$\vec{V}_m = (V_M + R \sin \theta \dot{\theta}, -R \cos \theta \dot{\theta}). \quad (1)$$

La risultante delle forze sul sistema ciotola+massetta è verticale, quindi la componente orizzontale della quantità di moto si conserva:

$$(m + M)V_M + mR \sin \theta \dot{\theta} = 0. \quad (2)$$

Le forze che agiscono sul sistema sono conservative, quindi pure l'energia meccanica si conserva:

$$\frac{1}{2}(m + M)V_M^2 + mV_m R \sin \theta \dot{\theta} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - mgR \sin \theta = 0. \quad (3)$$

La massa comincia a cadere e muoversi verso il punto B. Essa non si stacca dalla ciotola, quindi o raggiunge il punto B o inverte il suo moto a $\theta < \pi$. Se invertisse il suo moto, per la conservazione della componente orizzontale della quantità di moto dovrebbe fermarsi anche la ciotola ma quindi non si conserverebbe l'energia, perché la massetta sarebbe ad altezza minore di quella iniziale. Quindi la massa raggiunge il punto B. Per determinare lo spostamento della ciotola al punto B, basta integrare l'eq. 2:

$$\Delta x_M(\pi) = -\frac{2R}{1 + \frac{M}{m}},$$

che, in modulo, corrisponde allo spostamento massimo:

$$\Delta x_{M,\max} = \frac{2R}{1 + \frac{M}{m}}.$$

3. Il moto è periodico (non armonico) e simmetrico per $t \mapsto -t$, $\theta \mapsto \frac{\pi}{2} - \theta$.
Ci basta mettere a sistema le equazioni 2 e 3:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g \sin \theta}{R \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{1 + \frac{m}{M}} \right)}$$

e, sostituendo in eq. 1 troviamo $V_M(\theta)$:

$$V_M(\theta) = - \sqrt{\frac{2mgR \sin \theta}{\left(1 + \frac{M}{m} \right) \left[m \left(1 + \frac{M}{m} \right) \cot^2 \theta + M \right]}};$$

per $\Delta x_M(\theta)$ ci basta l'eq. 2:

$$\Delta x_M(\theta) = \frac{R}{1 + \frac{M}{m}} (\cos \theta - 1).$$

4. Dopo il distacco, la massetta cade di moto parabolico. Le condizioni iniziali si ottengono raccordando le traiettorie. Nell'istante del distacco, sulla ciotola la risultante delle forze è nulla e quindi il suo sistema di riferimento è inerziale. Mettendoci in questo sistema di riferimento, è immediato il calcolo della gittata (che nel sistema di riferimento della ciotola è pari alla componente orizzontale dello spostamento della massetta nell'istante in cui tocca il suolo):

$$V'_m(t_{\text{distacco}}) = R\dot{\theta}\left(\frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Il tempo di caduta si ricava da

$$h - \frac{\sqrt{2}}{2}R + \tilde{V}_m^y - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$

(e, richiedendo $t > 0$ siccome questo tempo è definito positivo)

$$\implies t = \frac{\tilde{V}_m^y}{g} + \sqrt{\frac{\tilde{V}_m^y}{g^2} - \frac{\sqrt{2}R - 2h}{g}}.$$

Infine,

$$\text{gittata} = \tilde{V}_m^x t.$$

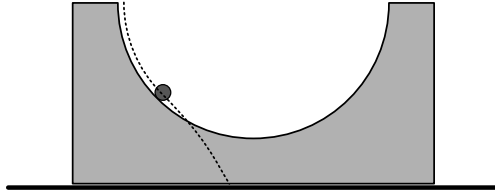


Figura 2: Disegno schematico della traiettoria all'eventuale distacco nel problema 6.

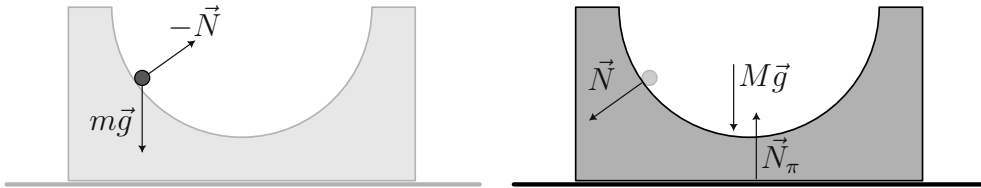


Figura 3: Disegno schematico delle forze del problema 6.

7 Repulsione in un campo elettrico — 80 pt.

1. Il problema, se affrontato nel sistema di riferimento del laboratorio, è alquanto complesso, in quanto ci sono due oggetti che interagiscono e quindi il numero di variabili in gioco è alto. La prima cosa da notare è che il moto di entrambi gli elettroni non è rettilineo e nemmeno uniformemente accelerato. Data la somiglianza con il problema di Keplero, possiamo immaginare quale sarà la soluzione. Ci sono due sistemi di riferimento in cui trattare questo problema è più semplice. Chiaramente le due trattazioni sono equivalenti, per cui verranno enumerate, se ne mostrerà l'equivalenza e poi il problema verrà risolto in uno solo dei due riferimenti:

- il riferimento del centro di massa;
- il riferimento di uno dei due elettroni.

Riferimento di un elettrone Mettendoci nel sistema di riferimento di uno dei due elettroni, otteniamo alcune semplificazioni. È indifferente quale dei due elettroni scegliamo, senza perdita di generalità ci metteremo nel riferimento del secondo elettrone. Questo sistema è non inerziale, per cui dobbiamo calcolare l'accelerazione dell'elettrone nel riferimento del laboratorio e aggiungere questa forza apparente nel riferimento non inerziale.

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_2}.$$

Nel riferimento di 2 quindi, l'elettrone 1 subirà una forza

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F}_{21} - \frac{m_1}{m_2} \vec{F}_{12},$$

ma dato che le due forze elettrostatiche sono azione-reazione, la formula si semplifica in

$$m_1 \vec{a}_1 = \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \vec{F} \rightarrow \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{a} = \vec{F},$$

che è l'equazione del moto di un oggetto solo di massa ridotta

$$\mu = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^{-1}$$

nel campo di una forza \vec{F} . Nel nostro caso, dato che $m_1 = m_2 = m$, vale $\mu = m/2$. Questo si può anche vedere, spostando il 2 alla destra dell'uguale, come un campo di forza doppia che agisce sull'elettrone. Le equazioni sono le stesse, quindi la soluzione sarà la stessa.

Questo metodo è perfettamente valido e porta al risultato corretto, ma, a scopo didattico, mostreremo anche la soluzione nel sistema del centro di massa.

Riferimento del centro di massa Come nella maggior parte dei problemi di meccanica, è molto utile spostarsi nel sistema di riferimento del centro di massa. In questo modo possiamo disaccoppiare il moto del centro di massa, che almeno nella prima parte del problema non è soggetto a forze esterne, dal moto dei componenti del sistema intorno al centro di massa. In generale, chiamando \vec{r}_i e \vec{v}_i posizione e velocità dei due elettroni, valgono le definizioni

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$(m_1 + m_2) \frac{d^2 \vec{R}_{\text{cm}}}{dt^2} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{ext}},$$

mentre per l'altra componente, dato che nel nostro caso vale

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F},$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_1}{m_1} - \frac{\vec{F}_2}{m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \vec{F},$$

che è l'equazione del moto di un oggetto di massa ridotta

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m}{2}$$

nel campo di forza

$$\vec{F} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} = \frac{k}{r^2} \hat{r}.$$

Questo è il moto di un corpo solo, che è molto più semplice da studiare. In particolare, la forza a cui è soggetto questo corpo è della stessa forma di quella gravitazionale, per cui la soluzione dell'equazione del moto sarà la stessa. In questo caso, le due cariche sono di segno uguale, per cui il moto sarà quello di un ramo di iperbole. Una volta che si è in questo riferimento, il problema diventa abbastanza semplice. Si tratta di moto in campo centrale, sappiamo che saranno conservati energia e momento angolare, per cui

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2(t) + \frac{k}{r(t)}, \quad L = \mu v(t)r(t) \sin \theta(t) = \mu v_\theta(t)r(t),$$

sono costanti del moto, con θ angolo tra \vec{r} e \vec{v} . Scrivendo la conservazione dell'energia ad un generico istante di tempo, omettendo la dipendenza temporale che si trova solo in r e v_θ , troviamo l'espressione

$$E = \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu v_\theta^2 + \frac{k}{r} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2}\mu \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r}. \quad (5)$$

Possiamo ora caratterizzare l'istante in cui i due elettroni raggiungono la distanza minima r_{\min} . In quel momento, proprio perché si tratta di un minimo, dovrà valere

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=r_{\min}} = 0. \quad (6)$$

Questo non vuol dire che la velocità degli elettroni è nulla, e non è nemmeno nulla nel riferimento del CdM. Al contrario, vuol dire che nel riferimento del CdM una sua componente è nulla, mentre l'altra è determinata dalla conservazione del momento angolare. Nel riferimento del laboratorio si può imporre una condizione simile: se r è la stessa quantità anche in quel riferimento, questa condizione va bene tale e quale. Se invece si vogliono usare le velocità dei due elettroni, una cosa che si può affermare è che la velocità relativa degli elettroni è ortogonale al raggio vettore che li congiunge, cioè

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot \vec{r} = 0.$$

Questa equazione è meno semplice da gestire, ma può comunque essere usata per arrivare alla soluzione. Tornando all'equazione Equazione (6), imponendo $\frac{dU}{dr} = 0$, si ottiene in modo improprio la stessa equazione. Dalla regola della derivata della funzione composta

$$0 = \frac{dU(r(t))}{dt} = \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dt},$$

e dato che il potenziale è non nullo ovunque, le soluzioni di una equazione sono le stesse dell'altra. Questa tecnica non può essere considerata corretta, in quanto calcolare quella derivata vuol dire calcolare la forza elettrica agente sugli elettroni, e richiedere che sia zero non ha senso fisico. Al contrario, se i due elettroni si respingono, il momento in cui sono alla minima distanza è quello in cui la forza è massima, ma non si tratta di un punto stazionario, che con questa forza non esiste. Derivare il potenziale efficace $U_{\text{eff}}(r) = U(r) + L^2/\mu r^2$, invece, non porta alla stessa soluzione, perché il potenziale efficace non è monotono e quindi la sua derivata ha degli zeri. Fisicamente, cercare i punti stazionari del potenziale efficace vuol dire cercare le orbite circolari, cosa che non ha niente a che fare con questo problema.

Riprendendo la conservazione dell'energia in Equazione (5) con la velocità radiale a zero, questa si traduce in una equazione di secondo grado per r :

$$E = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \rightarrow r^2 - \frac{k}{E}r - \frac{L^2}{2\mu} = 0.$$

Questa equazione ha due soluzioni,

$$r = \frac{k}{2E} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4E^2} + \frac{L^2}{2\mu}} = \frac{k}{2E} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} \right),$$

ma solo una di queste è accettabile. La quantità

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} > 1$$

è infatti l'eccentricità dell'orbita, ed è maggiore di 1 perché l'energia del sistema è positiva. Di conseguenza, una delle due soluzioni è non fisicamente accettabile in quanto negativa, mentre la variabile r è definita come un valore assoluto. Si conclude quindi dicendo che

$$r_{\min} = \frac{k}{2E} \left(\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}} + 1 \right)$$

$$k = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad \mu = \frac{m}{2} \quad E = \frac{1}{2}\mu v^2 + \frac{k}{d} \quad L = \mu v d \sin \theta.$$

È però necessario fare una precisazione: la distanza minima calcolata in questo modo potrebbe essere stata raggiunta nel passato. Se ci stiamo già allontanando dall'altro elettrone, la distanza minima è proprio d . Il fatto che ci stiamo già allontanando o meno all'istante iniziale dipende dal valore di $\theta \in [0, \pi]$ (il caso $\theta \in [\pi, 2\pi]$ è simmetrico). Il caso limite si ha proprio per $\theta = \pi/2$, che sostanzialmente rientra in entrambi i casi. Con molta pazienza e olio di gomito, è possibile inserire questo valore di θ nella formula per r_{\min} e verificare che effettivamente anche la formula fornisca questo risultato.

2. Questa domanda è stata inserita con lo scopo di dare punti facili, ottenibili anche senza risolvere la prima parte. Mettiamoci nel sistema di riferimento del centro di massa, come per la parte 1. In questo caso il riferimento non è inerziale, perché su tutti e due gli elettroni agisce una forza pari a

$$\vec{F}_e = -e\vec{E}$$

dove e è la carica elettrica elementare. Entrambi subiscono quindi in questo sistema una forza apparente che è proprio pari a $-\vec{F}_e$. L'accelerazione

apparente del sistema sarà quindi

$$\vec{a}_{\text{CM}} = \frac{2e\vec{E}}{m_1 + m_2},$$

e quindi su ognuno dei due elettroni agisce una forza apparente pari a

$$\vec{F}_e^{\text{app},i} = -\frac{2m_i}{m_1 + m_2}e\vec{E}$$

e proprio perché il rapporto e/m è costante per i due elettroni, questo semplifica perfettamente il contributo con la forza vera che agisce nel riferimento non inerziale. Per questo motivo, il problema è assolutamente identico al caso precedente e la risposta rimane invariata. Affermare che la risposta rimane invariata fornendo una giustificazione accettabile forniva l'intero punteggio per questa parte di problema.

8 Espansione inconsueta — 80 pt.

Sia k il rapporto costante tra dU e δL . Per la prima legge della Termodinamica si ha

$$dU = k\delta L = \delta Q - \delta L.$$

Trattandosi di un gas ideale l'energia interna dipende da T come

$$U = C_V n T.$$

Dove n è il numero di moli. Inoltre, differenziando l'equazione di stato si ottiene

$$pdV + Vdp = nRdT.$$

Dalle relazioni precedenti, ricordando che $\delta L = pdV$, risulta quindi

$$C_V V dp = p(Rk - C_V)dV,$$

e quindi, integrando, si ottiene

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{Rk}{C_V} - 1}.$$

Imponendo che per lo stato finale sia $p = \alpha p_0$ e $V = \beta V_0$ si ottiene tra le costanti k e C_V la relazione

$$\alpha = \beta^{\frac{Rk}{C_V} - 1}.$$

Il lavoro compiuto dal gas durante questa trasformazione è

$$L = \int_{V_0}^{\beta V_0} p(V) dV,$$

e il risultato finale è quindi

$$L = \frac{p_0 V_0 \ln \beta}{\ln \alpha \beta} (\alpha \beta - 1),$$

dove il rapporto $\frac{kR}{C_V}$ è stato espresso in funzione di α e β , usando la relazione precedentemente trovata.

9 Oscillazioni in salse varie — 100 pt.

1. Siano O il centro del disco, C l'estremo fisso della molla, P l'estremo attaccato al disco. Sia $\theta = \angle COP$. La posizione di equilibrio stabile è quella in cui la lunghezza l della molla è minima, cioè quando O , C , P sono allineati e $\theta = 0$. Il modulo della forza elastica è $F = kl$; essa è sempre diretta verso C . Dal teorema dei seni sul triangolo COP si ottiene

$$\sin(\angle OPC) = \frac{3R \sin \theta}{l}.$$

Il modulo del momento torcente esercitato dalla molla sul disco (calcolato rispetto all'asse di rotazione) è quindi

$$M = FR \sin(\angle OPC) = 3kR^2 \sin \theta \approx 3kR^2 \theta$$

per $|\theta| \ll 1$. Questo è l'unico momento torcente sul disco, quindi l'equazione del moto è

$$I\ddot{\theta} = -3kR^2\theta,$$

dove $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione. Questa è l'equazione di un moto armonico di periodo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{3kR^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{6k}}.$$

2. La posizione di equilibrio stabile è la stessa del punto precedente. Dal teorema del coseno sul triangolo COP si ottiene la lunghezza della molla in funzione di θ :

$$l = \overline{CP} = R\sqrt{10 - 6 \cos \theta}.$$

L'energia potenziale del sistema è

$$U(\theta) = \frac{1}{2}k(l - 2R)^2 = \frac{1}{2}kR^2(\sqrt{10 - 6\cos\theta} - 2)^2 \approx \frac{9}{32}kR^2\theta^4$$

per $|\theta| < |\phi| \ll 1$. Non ci sono forze esterne che fanno lavoro sul sistema disco-molla, quindi l'energia meccanica si conserva. Nelle oscillazioni di ampiezza ϕ l'energia totale è

$$E = U(\phi) = \frac{9}{32}kR^2\phi^4.$$

Si ha dunque $U(\phi) = U(\theta) + \frac{1}{2}I\omega(\theta)^2$, dove $\omega(\theta)$ è la velocità angolare del disco in posizione θ , da cui

$$\omega(\theta) = \sqrt{\frac{2}{I}(U(\phi) - U(\theta))}.$$

Inoltre $\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\theta}{\omega}$, da cui

$$\begin{aligned} \int_0^{T(\phi)/2} dt &= \int_{-\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{\omega} \\ \Rightarrow T(\phi) &= 2 \int_{-\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{\omega} = 2 \int_{-\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I}(U(\phi) - U(\theta))}}. \end{aligned}$$

Analogamente si ha

$$T(2\phi) = 2 \int_{-2\phi}^{2\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I}(U(2\phi) - U(\theta))}}.$$

Il rapporto cercato è dunque

$$\frac{T(2\phi)}{T(\phi)} = \frac{\int_{-2\phi}^{2\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{U(2\phi) - U(\theta)}}}{\int_{-\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{U(\phi) - U(\theta)}}} = \frac{\int_{-2\phi}^{2\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{(2\phi)^4 - \theta^4}}}{\int_{-\phi}^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{\phi^4 - \theta^4}}}.$$

Operando la sostituzione $\alpha = \frac{\theta}{2\phi}$ nel primo integrale e $\beta = \frac{\theta}{\phi}$ nel secondo si ottiene infine

$$\frac{T(2\phi)}{T(\phi)} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\alpha}{2\phi\sqrt{1-\alpha^4}}}{\int_{-\beta}^{\beta} \frac{d\beta}{\phi\sqrt{1-\beta^4}}} = \frac{1}{2}.$$

10 Effetti di marea — 130 pt.

In tutta la soluzione useremo un sistema di assi cartesiani $Oxyz$ tale che l'origine si trovi - a seconda dei casi - nel centro del tubo o dell'asta, che l'asse x sia diretto lungo la congiungente navicella-pianeta (con le x positive allontanandosi dal pianeta), che il piano xy contenga a ogni istante il tubo o l'asta, e che l'asse z soddisfi $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$.

1. Quando la massetta si trova al centro del tubo, la forza gravitazionale che sperimenta è $\vec{F}_g = -\frac{GMm\hat{x}}{R^2}$, dove G è la costante di gravitazione universale, mentre la forza elettrica dovuta al condensatore vale $\vec{F}_e = -qE_0\hat{x}$, pertanto deve essere:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow q = -\frac{GMm}{R^2 E_0}.$$

2. Per via dello spostamento, la forza gravitazionale vale adesso:

$$\vec{F}_g(s) = -\frac{GMm[(R + s \cos \theta)\hat{x} + s \sin \theta \hat{y}]}{[(R + s \cos \theta)^2 + (s \sin \theta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Approssimando al primo ordine in $\frac{s}{R}$ si ottiene:

$$\vec{F}_g(s) \approx -\frac{GMm\hat{x}}{R^2} + \frac{GMms(2 \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})}{R^3}.$$

Sommando la forza elettrica, che resta invariata al variare di s , il termine non dipendente da s si cancella. Tenendo conto della presenza della forza normale procurata dal tubo, che impedisce alla massetta di fuoriuscirne lateralmente, la forza totale agente sulla massetta risulta data dalla componente lungo la direzione del tubo di $\vec{F}_g(s) + \vec{F}_e$, cioè:

$$\vec{F}_{\text{net}} = (\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}) \frac{GMms(3 \cos^2 \theta - 1)}{R^3}.$$

3. Il centro del tubo è una posizione di equilibrio stabile per la massetta se la forza calcolata nel punto precedente risulta attrattiva, cioè se:

$$3 \cos^2 \theta - 1 < 0 \Leftrightarrow \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < \theta < \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

4. La forza totale agente su ciascuna delle due masse, dovuta a campo elettrico esterno, campo elettrico dell'altra carica, e gravità, si trova come nei punti precedenti, e, al primo ordine in $\frac{L}{R}$, vale quindi:

$$\vec{F}_{\text{tot}}(\pm L) = \pm \frac{GMmL(2 \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y})}{R^3} \pm \frac{q^2(\cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y})}{4\pi\epsilon_0(2L)^2},$$

perciò il momento torcente totale agente sull'asta e le massette vale:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\text{tot}} &= L(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \times \vec{F}_{\text{tot}}(L) - L(\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta) \times \vec{F}_{\text{tot}}(-L) = \\ &= -\frac{6GMmL^2 \sin \theta \cos \theta \hat{z}}{R^3}. \end{aligned}$$

Il momento d'inerzia del sistema è $I = 2mL^2$, quindi vale:

$$2mL^2 \ddot{\theta} = -\frac{6GMmL^2 \sin \theta \cos \theta}{R^3}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per $\dot{\theta}$ e integrando tra $\frac{\pi}{4}$ e θ_0 , si trova la velocità angolare dell'asta quando l'angolo θ vale θ_0 :

$$\omega^2 = \frac{3GM \cos(2\theta_0)}{2R^3},$$

dunque, per non negatività di ω^2 , deve essere $\cos(2\theta_0) > 0$, quindi per $-\frac{\pi}{4} < \theta_0 < \frac{\pi}{4}$. Studiamo le forze agenti sulla singola massetta (senza perdita di generalità, quella posta in $L\hat{x} \cos \theta_0 + L\hat{y} \sin \theta_0$): la risultante della componente radiale di $\vec{F}_{\text{tot}}(L)$ e della forza $-F_0(\hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0)$ deve dare l'accelerazione centripeta $-mL\omega^2(\hat{x} \cos \theta_0 + \hat{y} \sin \theta_0)$ della massa, quindi si trova:

$$F_0 = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2} + \frac{GMmL}{R^3} \left(6 \cos^2 \theta_0 - \frac{5}{2} \right).$$

Al variare di θ_0 nell'intervallo consentito, il massimo di tale espressione risulta $\frac{7GMmL}{2R^3}$, perciò i valori cercati di F_0 sono quelli per cui $F_0 > \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 L^2} + \frac{7GMmL}{2R^3}$.

11 Raggio apparente di un pianeta — 150 pt.

1. Per trovare una generalizzazione della legge di Snell discretizziamo la variazione di $n(r)$ e consideriamo il diagramma in figura 4. Si ha

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2.$$

Per il teorema dell'angolo esterno vale

$$\theta_2 = \theta'_2 + \delta\theta,$$

quindi

$$\begin{aligned}\sin \theta_2 &= \sin \theta'_2 + \cos \theta'_2 d\theta, \\ n_1 \sin \theta_1 &= n_2 \sin \theta'_2 + n_2 \cos \theta'_2 d\theta,\end{aligned}$$

da cui

$$d(n \sin \theta) = -n \cos \theta d\theta = -\frac{n}{r} \frac{dr}{dl} r d\theta = -n \frac{dr}{r} \sin \theta,$$

ovvero

$$rd(n \sin \theta) + n \sin \theta dr = 0,$$

$$d(n(r)r \sin \theta) = 0,$$

perciò la quantità $n(r)r \sin \theta$ si conserva.

Soluzione alternativa Il principio di Fermat afferma che un raggio di luce che si muove tra un punto A e un punto B sceglie la traiettoria che minimizza il tempo necessario per percorrere la traiettoria stessa.

Questo può essere espresso dicendo che la traiettoria è determinata minimizzando il funzionale

$$\mathcal{S} = \int dt$$

con la condizione di tenere gli estremi della traiettoria fissati. Questo funzionale può essere riespresso parametrizzando la traiettoria in coordinate polari (r, ϕ) .

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \int dt \\ &= \frac{1}{c} \int n(\vec{x}) |d\vec{x}| \\ &= \frac{1}{c} \int n(r) \sqrt{r'^2 + r^2} d\phi,\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che se $\vec{x} = r\hat{r}$ allora $d\vec{x} = dr\hat{r} + rd\phi\hat{\phi} = d\phi(r'\hat{r} + r\hat{\phi})$. Il principio di Fermat diventa quindi equivalente al principio di Hamilton e la Lagrangiana associata al moto è

$$\mathcal{L}(r, r', \phi) = n(r)(r'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Siccome la lagrangiana non dipende esplicitamente da φ , l'Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = pr' - \mathcal{L}$$

è conservata:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= pr' - \mathcal{L} \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r'} r' - \mathcal{L} \\ &= n(r) \frac{r'^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} - n(r)(r'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= -n(r) \frac{r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &= -n(r)r \sin \theta. \end{aligned}$$

2. Utilizziamo la parametrizzazione della traiettoria in coordinate polari (r, ϕ) . Cerchiamo la funzione $r(\varphi)$ che è la distanza dal centro del pianeta in funzione dell'angolo delle coordinate polari.

Dal punto precedente abbiamo

$$n(r)r \sin \theta = n_0 R \sin \theta_0$$

$$n(r) \frac{r^2}{(r'^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}} = n_0 R \sin \theta_0$$

$$r' = r \sqrt{\frac{n(r)^2 r^2}{n_0^2 R^2 \sin^2 \theta_0} - 1},$$

ovvero

$$\varphi = \int_R^r \frac{dx}{x \sqrt{\frac{n(x)^2 x^2}{n_0^2 R^2 \sin^2 \theta_0} - 1}}.$$

Conoscendo la forma esplicita di $n(r)$ è possibile, almeno in teoria, svolgere l'integrale e invertire la funzione trovata per trovare $r(\varphi)$.

3. Fissato $\theta_0 \neq \frac{\pi}{2}$, sia $f(r) = \frac{n(r)^2 r^2}{n_0^2 R^2 \sin^2 \theta_0} - 1$. Ci sono diversi casi che possiamo considerare:

- $f(r)$ è sempre strettamente positiva e quindi l'integrando è una funzione limitata, in questo caso l'integrale converge per ogni r e quindi il raggio si allontana indefinitivamente;

- $f(r)$ è negativa in un intervallo della forma (r_1, r_2) ed è positiva nell'intervallo $[R, r_1)$, in questo caso l'integrale fino a r_1 converge quindi il raggio arriva nel punto (r_1, φ_1) , con

$$\varphi_1 = \int_R^{r_1} \frac{dx}{x \sqrt{\frac{n(x)^2 x^2}{n_0^2 R^2 \sin^2 \theta_0} - 1}}$$

ma poi evidentemente non può proseguire per valori superiori di r quindi questo è il caso di riflessione totale interna e il raggio non si allontana indefinitivamente.

- $f(r)$ si annulla in r_1 ed è positiva in un intorno della forma $[R, r_2]$ con $r_2 > r_1$, in questo caso $f(r) \simeq \cos^2(r - r_1)^2 + \dots$ quindi l'integrale fino a r_1 diverge, in questo caso il raggio di luce non può allontanarsi indefinitivamente dal pianeta e compie infiniti giri attorno al pianeta, l'orbita di addensa attorno a $r = r_1$.

Se il raggio parte con $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ allora $f(r) = \frac{n(r)^2 r^2}{n_0^2 R^2} - 1$ e bisogna considerare il comportamento vicino $r = R$, ci sono due casi:

- $n(r) = n_0 - \frac{n_0}{R}(r - R) + \dots$ vicino $r = R$, in questo caso l'integrale diverge per ogni $r > R$ quindi il raggio rimane confinato sulla superficie del pianeta e termina contro il primo granello di polvere che incontra.
- $n(r) = n_0 - a(r - R) + \dots$ con $a \neq \frac{n_0}{R}$ vicino $r = R$, l'integrale converge per r vicino a R e ci si riconduce alla stessa casistica di prima.

4. La condizione affinché tutti i raggi si allontanino indefinitivamente è che $f(r)$ sia sempre positiva per $r > R$ e che la sua derivata in $r = R$ sia positiva.
5. Consideriamo un osservatore che si trova a distanza d , a questo arrivano dei raggi di luce provenienti dal pianeta all'interno di un cono di semiapertura $\theta(d)$, il raggio apparente per questo osservatore è quindi circa $\mathcal{R}(d) = d\theta(d)$, per un osservatore posto a distanza infinita il raggio apparente è $\mathcal{R} = \lim_{d \rightarrow \infty} d\theta(d)$, come si può dedurre dalla figura 5. Per la legge di Snell se un raggio arriva con un angolo θ all'osservatore allora era partito dalla superficie con un angolo θ_0 tale che

$$\sin \theta_0 = \frac{n(d)d \sin \theta}{n_0 R}.$$

Prendendo il massimo su tutti i raggi che arrivano all'osservatore troviamo

$$1 = \frac{n(d)d \sin \theta(d)}{n_0 R}.$$

Prendendo ora il limite per $d \rightarrow \infty$ si trova

$$1 = \frac{\mathcal{R}}{n_0 R},$$

ovvero $\mathcal{R} = n_0 R$.

6. L'analisi in questo caso è analoga al punto precedente, l'unica differenza è che esiste un valore massimo per l'angolo θ_0 di un raggio che arriva all'osservatore e quindi prendendo il massimo su tutti i raggi che arrivano all'osservatore

$$\sin \bar{\theta} = \frac{n(d)d \sin \theta(d)}{n_0 R},$$

in cui $\bar{\theta}$ è tale che per ogni $r > R$, $f(r) \geq 0$ ed esiste un valore $\bar{r} > R$ tale che $f(\bar{r}) = 0$. Come prima si trova $\mathcal{R} = \sin \bar{\theta} n_0 R$.

7. Osserviamo che se chiamiamo

$$\varphi(\theta_0) = \int_R^\infty \frac{dx}{x \sqrt{\frac{n(x)^2 x^2}{n_0^2 R^2 \sin^2 \theta_0} - 1}},$$

allora questa funzione è finita per $\theta_0 < \bar{\theta}$ e diverge per $\theta_0 \rightarrow \bar{\theta}$ in particolare per θ_0 vicino a $\bar{\theta}$ una piccola variazione di θ_0 causa una grande variazione di $\varphi(\theta_0)$ ovvero il sistema è caotico e quindi un osservatore a distanza infinita, in particolare a distanza maggiore di \bar{r} , vede una sovrapposizione di raggi provenienti da diverse parti del pianeta quindi osserva una figura in cui non distingue nessuna struttura sul pianeta e vede i colori presenti sul pianeta tutti mischiati tra di loro. Per esempio i raggi provenienti dal retro e dal fronte del pianeta possono mischiarsi.

12 Rimbaldi in un campo magnetico

— 110 pt.

Chiamiamo $q(t)$ la carica nel condensatore al tempo t , $x(t)$ la distanza tra la sbarretta e W_1 e prendiamo la corrente \dot{q} positiva in senso antiorario.

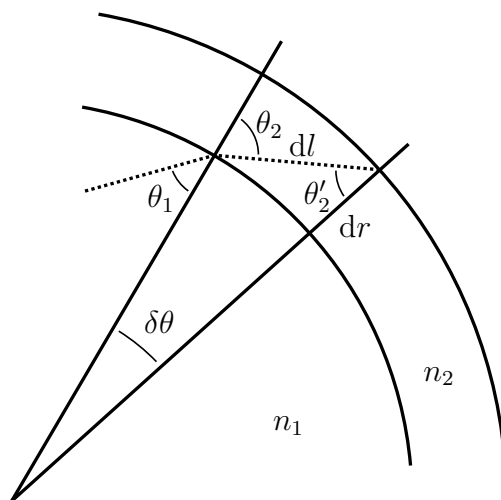


Figura 4: Equazione differenziale per θ .

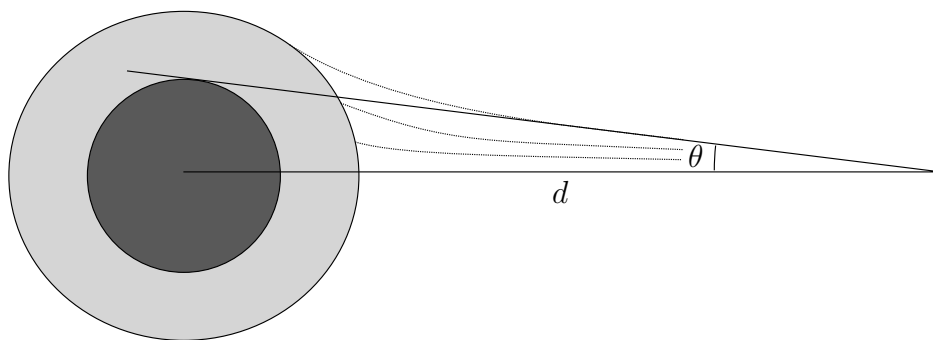


Figura 5: Raggio apparente nel problema 11.

Per la seconda legge di Newton e la legge di Lorentz, vale

$$m\ddot{x} = -B_0\dot{q}l.$$

Il flusso di \vec{B}_0 concatenato al circuito è $\Phi = -l(D - x)B_0$, da cui, applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz $\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$, la legge di Ohm $V = R\dot{q}$ e la definizione di capacità $C = q/V$, otteniamo

$$lB_0\dot{x} + \frac{q}{C} + R\dot{q} = 0.$$

Derivando questa equazione e sostituendo l'espressione di \dot{q} ottenuta dalla legge di Newton, si ottiene

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{1}{\tau} \frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

con $\tau = \frac{RC}{1+l^2B_0^2C/m}$. Integrando due volte e imponendo la condizione iniziale $\dot{x}(t) = 0$, $x(0) = \frac{D}{2}$, si ottiene

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= V_0(1 - e^{-t/\tau}) \\ x(t) &= \frac{D}{2} + V_0\tau \left[t/\tau + e^{-t/\tau} - 1 \right],\end{aligned}$$

con $V_0 = \frac{lB_0q_0}{m} \frac{1}{1+l^2B_0^2C/m}$. Finché la sbarretta non urta W_2 , si muove con velocità positiva, quindi urta prima la parete destra. Questo avviene all'istante T che soddisfa $x(T) = D$. L'equazione

$$\frac{D}{2V_0\tau} + 1 = T/\tau + e^{-T/\tau}$$

si risolve tramite la funzione W di Lambert in modo esatto. Alternativamente, possiamo trovare una soluzione approssimata in due casi:

1. $\left| \frac{D}{2V_0\tau} + 1 \right| \ll 1$, cosa ovviamente non vera. In questo caso potremmo sviluppare il RHS in Taylor al secondo ordine in T/τ e risolvere;
2. $\left| \frac{D}{2V_0\tau} + 1 \right| \gg 1$: in questo caso possiamo trascurare l'esponenziale e la soluzione è

$$T \simeq \frac{D}{2V_0} + \tau.$$

Effettivamente, il secondo caso avviene: infatti

$$\frac{D}{2V_0\tau} = \frac{D}{B_0lq_0Rcm} (m + l^2B_0^2C)^2 > \frac{Dm}{B_0lq_0Rc} \gg 1$$

per la condizione data nel testo. Quindi gli esponenziali sono molto piccoli e in tutta la trattazione seguente li trascureremo. Da questo segue immediatamente che la velocità al primo urto è

$$v_1 = V_0 = \frac{q_0}{B_0lC} \frac{1}{1 + m/l^2B_0^2C}.$$

Dopo l' n -esimo urto, la fisica non è variata rispetto al caso precedente, al quale possiamo ricondurci cambiando le condizioni iniziali. Siccome vale sempre $\tau \ll |D/\dot{x}|$, assumiamo che all'urto, le velocità siano quelle asintotiche. Siano q_n , v_n la carica nel condensatore e la velocità della sbarretta appena prima l' n -esimo urto. q_n può essere ottenuto dalla legge delle maglie:

$$q_n = -B_0lCv_n.$$

Integrando \ddot{x} con la soluzione trovata prima, si vede che

$$v_{n+1} + v_n = \ddot{x}_n \tau,$$

dove \ddot{x}_n è l'accelerazione appena dopo l' n -esimo urto, che può essere ricavata dal sistema trovato prima.

$$\ddot{x}_n = -\frac{B_0 l}{Rm} \left[\frac{q_n}{C} - B_0 l v_n \right] \Rightarrow v_{n+1} = \left(\frac{l^2 B_0^2 C - m}{l^2 B_0^2 C + m} \right) v_n,$$

da cui, per induzione,

$$v_n = \left(\frac{l^2 B_0^2 C - m}{l^2 B_0^2 C + m} \right)^{n-1} V_0.$$