Problemi di ammissione allo Stage di Fisica a Pisa 2020

Lo staff dello Stage

15 novembre 2019

Introduzione

Ciao! I problemi che state per leggere sono per voi la prima sfida che vi separa dalla possibilità di partecipare allo stage di Febbraio 2020. Leggete attentamente questa introduzione perché potrà esservi molto utile per approcciarvi al test nel modo corretto.
Avrete circa due settimane per risolvere i problemi che vi sono stati assegnati, perciò sentitevi liberi di andare a cercare le informazioni che vi servono se non conoscete alcuni termini o anche tutta la fisica (formule, leggi di conservazione...) che si nasconde dietro i testi dei quesiti. Nonostante ciò, sconsigliamo fortemente di cercare direttamente le soluzioni, di far risolvere i problemi ad altri o di svolgerli in gruppo. Non serve per le olimpiadi (nelle quali sarete da soli!) e non vi aiuta ad imparare ad approcciare argomenti nuovi in maniera autonoma.
I problemi sono stati ordinati in base alla difficoltà; inoltre i più difficili sono stati contrassegnati da una o più stelle (★). La difficoltà è soggettiva, per cui vi invitiamo a non scoraggiarvi e a provare a risolvere tutti i problemi: gli ultimi potrebbero apparirvi meno difficili di quanto pensiate.
Per iscrivervi dovrete inviare un unico file pdf con tutte le vostre soluzioni. Esso può essere stato scritto in qualsiasi modo: LaTeX, Word, anche le foto di manoscritti (purché leggibili, ciò che non si legge verrà ignorato) sono accettate.
È importante che alla fine mandiate anche le soluzioni incomplete se non riuscite a risolvere completamente il testo proposto: il punteggio totale del problema è suddiviso in modo da poter dare punteggi parziali a chi non completa tutte le richieste e a chi fa semplici osservazioni.
Sappiamo che chi è più giovane può avere lo svantaggio di conoscere meno teoria per cui essi riceveranno bonus adeguati.
Il test è valutato su un totale di 1000 punti.
Il punteggio minimo per poter fare l'orale è di soli 50 punti, al di sotto dei quali scarteremo la richiesta.
Buon lavoro!

1 Produzione di vapore [50pt]

Si prenda un disco cilindrico metallico approssimabile a corpo nero perfettamente conduttore di raggio $r = 0.1\,\mathrm{m}$, altezza $h = 1\,\mathrm{cm}$ e massa $m = 1\,\mathrm{kg}$. Lo si esponga al sole in modo che una sua faccia circolare sia disposta perpendicolarmente ai raggi solari. L'intensità luminosa trasmessa dal sole alla superficie terrestre è $I = 10^4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Si supponga che il disco perda calore solo per irraggiamento e che l'irraggiamento si verifichi in ogni direzione dello spazio.

1. Trovare la temperatura di equilibrio del disco.

Il disco viene immerso istantaneamente in una vaschetta isolata dall'ambiente contenente un volume $V_0 = 1\,\mathrm{l}$ di acqua a $20\,^\circ\mathrm{C}$. La vaschetta ha capacità termica nulla.

2. Supponendo che il metallo abbia capacità termica $C = 3000\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$, si trovi la massa del vapore prodotto durante il processo.

Si ripete il processo di riscaldamento del disco più volte, ma variando la quantità di acqua presente nella vaschetta (l'acqua immessa è sempre a $20\,^\circ\mathrm{C}$).

3. Determinare qual è la massa massima di acqua da mettere nella vaschetta perché essa evapori totalmente.

4. Determinare qual è la massa minima di acqua da mettere nella vaschetta perché non avvenga produzione di vapore (si trascuri l'effetto dell'evaporazione).

Dati aggiuntivi:

- Calore specifico acqua $c_a = 4186\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\,K}}$
- Calore latente ebollizione acqua $\lambda = 2.272\,\frac{\mathrm{MJ}}{\mathrm{kg}}$

2 Suono di una chitarra [50pt]

Una corda di chitarra lunga $L = 1\,\mathrm{m}$ con costante elastica $k = 10^4\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ è pizzicata nel punto medio e contemporaneamente si misura l'intensità sonora in funzione del tempo a una distanza $D = 5\,\mathrm{m}$; le rilevazioni sono riportate nel grafico in Figura 1. Sapendo che la chitarra può essere considerata una sorgente isotropa, che la corda ha una tensione iniziale $T = 100\,\mathrm{N}$, e che tutta l'energia viene dissipata dalla corda in onde sonore, calcolare lo spostamento x del punto medio della corda rispetto alla posizione iniziale subito prima che la corda sia rilasciata.

Importante: si può supporre che sia $x \ll \frac{L}{2}$.

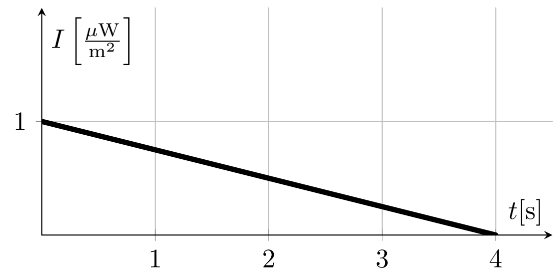

Figura 1: grafico dell'intensità sonora in funzione del tempo.

3 Pallone sonda [50pt]

In un pallone sferico rigido di volume $V = 1.0\,\mathrm{m}^3$ si raccolgono 150 g di vapore (trattarlo come un gas perfetto di massa molare $M = 18\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$) alla temperatura di 20 °C.

1. Calcolare la pressione del vapore all'interno del pallone.

2. Supponendo che esso abbia massa $m_0 = 25\,\mathrm{g}$ e che l'atmosfera abbia densità $\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{z}{z_0}}$ dove z è la quota in metri sul livello del mare e valgono $\rho_0 = 1.2\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ e $z_0 = 10\,\mathrm{km}$, trovare l'altezza alla quale il pallone si trova in equilibrio (cioè la quota alla quale esso può restare indefinitamente).

3. In realtà il pallone ha una certa energia cinetica e raggiunta la quota di equilibrio esso ha una velocità verso l'alto che gli impedisce di fermarsi. Considerando la velocità piccola (dell'ordine dei metri al secondo) dire qualitativamente perché il moto è periodico e determinarne il periodo.

Può essere utile notare che $e^x - 1 \approx x$ con $x \ll 1$.

4 Circuiti non lineari [80pt]

Si consideri un nuovo elemento circuitale X costituito da un parallelepipedo di resistività ρ. Tale parallelepipedo è studiato per modificare la sua forma mantenendo inalterato il suo volume in modo che il rapporto tra la sua lunghezza l e la sua sezione S sia pari in ogni istante a una certa costante k moltiplicata per la corrente che lo attraversa. Ci limiteremo a considerare i casi in cui la corrente che scorre nell'elemento sia diversa da 0 in modo che il problema mantenga significato fisico.

1. Disegnare la curva caratteristica dell'elemento X. Tale curva caratteristica è un grafico che associa ad ogni valore di differenza di potenziale applicata ad un elemento circuitale il corrispettivo valore di intensità di corrente che scorre nell'elemento.

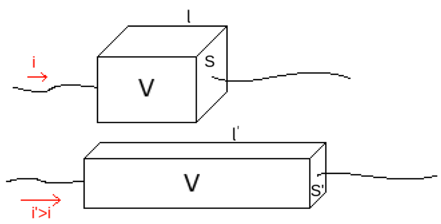

Figura 2: Elemento X

Prendiamo un circuito elettrico costituito da questi tre elementi posti in serie: un generatore di tensione V_0, un resistore ohmico R e il nostro elemento X.

2. Si ricavi analiticamente l'espressione della corrente i_0 che scorre nel circuito in funzione di k, ρ, V_0 e R.

3. Disegnare sul grafico la retta di carico del circuito e spiegare dove si può leggere dal grafico il valore di i_0.

Si consideri ora il circuito mostrato in Figura 3 costituito da un generatore di tensione V_0, una resistenza R, un amperometro ideale e tre elementi X.

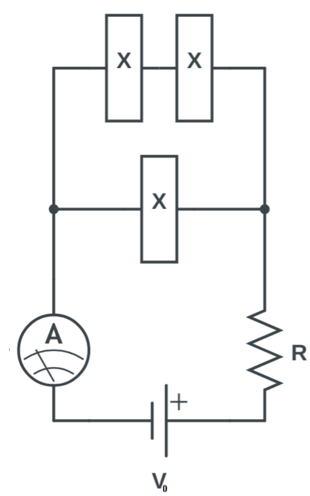

Figura 3: circuito del punto 6.

4. Trovare il valore di corrente misurato dall'amperometro.

5 Diapason e pianeti alieni [70pt]

Un diapason emette onde sonore alla frequenza di $f_0 = 321\,\text{Hz}$. Si supponga di essere su un pianeta alieno di cui non si conosce l'accelerazione di gravità sulla superficie e di lasciar cadere il diapason da un'altezza ignota. Un rilevatore posto a terra direttamente sotto il diapason registra la frequenza dell'onda sonora che lo colpisce ogni 2 secondi a partire dall'istante t_0 in cui il diapason inizia a cadere. Non si tenga conto del ritardo dovuto al fatto che la velocità del suono è finita. La velocità del suono nella bassa atmosfera del pianeta è $v_s = 543\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Lo strumento registra i seguenti dati:

t [s]	f [Hz]
0.0	321
2.0	341
4.0	363
6.0	389
8.0	418

1. Si determini l'espressione della frequenza teorica rilevata dallo strumento all' istante t generico in funzione di v_s, f_0, accelerazione di gravità del pianeta g e altezza di lancio h.

2. Da considerazioni grafiche sui dati in tabella, si ricavi il valore numerico di g.

3. Si determini l'altezza iniziale di lancio h se il diapason atterra con una frequenza percepita al terreno di $f_t = 450\,\text{Hz}$.

4. Si determini l'ordine di grandezza della massima altezza da cui si può lasciar cadere il diapason se si vuole far sì che le formule usate nei casi precedenti non perdano validità.

Si immagini ora un diapason in orbita bassa circolare attorno ad una piccola luna dotata di atmosfera, di raggio $R = 10\,\text{km}$, accelerazione di gravità $g' = 5.4\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ e nella quale la velocità del suono sia la stessa di quella del pianeta precedente, ad un altezza di $h_0 = 10\,\text{m}$ dalla superficie. Si trascuri ogni forma di attrito. Si pensi di essere all'istante iniziale a terra direttamente sotto il diapason in orbita. Si consideri un sistema di riferimento con ordinata verticale ed ascissa orientata nella direzione del moto del diapason e si approssimi la traiettoria di quest'ultimo come rettilinea nel corso dell'osservazione.

5. Si trovi un'espressione per la frequenza dell'onda generata dal diapason lungo la congiungente con l'osservatore, come è percepita da quest'ultimo, in funzione della coordinata x del diapason. Si calcolino i valori numerici della frequenza per x molto grande, in entrambe i versi, e a $x_1 = 20\,\text{m}$.

NB: non si tenga conto della validità scientifica dei dati numerici nell'ultimo punto del problema.

6 Bilancia per astronauti [70pt]

Una bilancia per pesare oggetti in orbita consiste in un oscillatore massa-molla: un sistema di molle di costante elastica complessiva $k = 605.6\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ che collegano una sedia di massa m all'astronave di massa M. A terra il periodo di oscillazione della sedia attorno alla sua posizione di equilibrio è $T_1 = 1.2895\,\mathrm{s}$.

1. Si calcoli la massa della sedia.

In orbita, il periodo di oscillazione misurato della sedia è $T_2 = 1.273\,95\,\mathrm{s}$.

2. Si calcoli la massa M dell'astronave.

Un astronauta che si vuole pesare si siede sulla sedia e si lega ad essa in modo da oscillare con essa. Si misura un periodo di oscillazione $T_3 = 2.330\,44\,\mathrm{s}$.

3. Si determini la massa dell'astronauta.

7 Allungamento di una molla slinky [80pt]

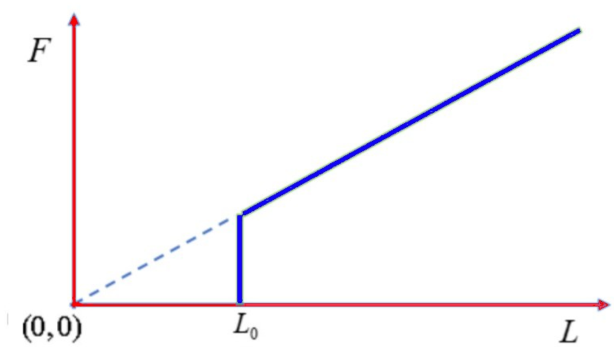

Figura 4: relazione lunghezza-forza.

Una molla ZLS (molla a lunghezza zero) è una molla per la quale la forza è proporzionale alla lunghezza della molla, ovvero $F = kL$ per $L > L_0$ dove L_0 è la minima lunghezza della molla che corrisponde alla sua lunghezza a riposo. La Figura 4 mostra la relazione tra la forza F e la lunghezza della molla L per una ZLS, dove la pendenza della retta è la costante di elasticità k.

Qui considereremo una ZLS omogenea, con peso $Mg > kL_0$. Definiamo quindi il parametro adimensionale $\alpha = kL_0/Mg < 1$ per descrivere la durezza della molla. Il giocattolo noto come "molla slinky" potrebbe essere (ma non necessariamente) una ZLS.

1. Immaginiamo di dividere la molla in $N \gg 1$ piccole molle ciascuna di massa $m = M/N$. Qual è la costante elastica k' di queste piccole molle in funzione di N, k? Si spieghi come si arriva a questo risultato.

A questo punto, appendiamo la molla dal suo estremo superiore in verticale, così che si allunghi a causa del proprio peso. Vogliamo calcolare H, la lunghezza totale della molla appesa in equilibrio. Per fare ciò dividiamo la molla in N piccole molle numerate, dove la molla numero 1 è la molla più in basso, mentre la molla N è la molla più in alto.

2. L'estremo inferiore della molla non si allunga. Quindi per un certo i_0 tutte le piccole molle con $i < i_0$ rimangono a riposo. Quanto vale i_0 in funzione di α, N?

3. Per $i > i_0$ le piccole molle si allungano. Quanto vale l_i, la lunghezza totale dell'i-esima molla, in funzione di i, L_0, N, α?

4. Trova H in funzione di L_0, α. Potrebbe esserti utile sapere che per $N \gg 1$ $1 + 2 + \cdots + N \approx \frac{N^2}{2}$.

8 Giù da uno scalino ★ [100pt]

Una ruota rigida e omogenea di raggio R e massa m rotola con velocità v lungo un piano orizzontale e il moto in ogni punto è di puro rotolamento. Il piano a un certo punto si interrompe, formando uno scalino verticale di altezza $h > R$. Dopo il salto, la ruota tocca terra ad una distanza G dalla base del gradino.

1. Trovare una espressione di G in funzione dei dati del problema e della velocità della ruota.

2. Fissando $h = 2R$, qual è il minimo valore di G al variare di v?

9 Tubo con aria e mercurio ★★ [100pt]

La metà inferiore isolata di un tubo di vetro verticale, di lunghezza 152 cm, è riempita di aria. La metà superiore contiene mercurio e l'estremità superiore del tubo è lasciata aperta. Assumi che la pressione atmosferica valga $p_0 = 760\,\mathrm{mmHg}$. Definiamo il calore molare come la costante adimensionale C tale che se δQ è la quantità di calore fornita all'aria allora vale $\delta Q = nCR \cdot \mathrm{d}T$. Sia V il volume dell'aria e V_0 il volume totale del tubo di vetro. L'aria è riscaldata lentamente e si supponga che il sistema si trovi in ogni istante in una situazione di equilibrio.

1. Dimostrare che C in funzione del volume dell'aria vale $C(V) = \frac{24V-21V_0}{8V-6V_0}$ e disegnarne il grafico.

2. Spiegare qualitativamente cosa significano dal punto di vista fisico:
   (a) $C = 0$
   (b) C che diverge a infinito

(c) C strettamente positivo

(d) C strettamente negativo

Nota bene: Il vero constraint del problema é che il volume del gas continua ad aumentare fino a raggiungere il valore $V = V_0$. La parete fornisce calore quando necessario, ma puó farlo solo in un verso, ovvero $\mathrm{d}Q \geq 0$.

3. Disegnare il grafico $p - V$ dell'aria nell'intervallo di tempo in cui viene fornito calore.

4. Calcolare la quantità totale di calore Q che bisogna fornire all'aria per far fuoriuscire del tutto il mercurio dal tubo di vetro, in funzione di p_0 e V_0.

10 Arrivo su un esopianeta ★★ [150pt]

Arriviamo su un pianeta che ora si trova al periapside (il punto della sua orbita in cui è più vicino alla stella) e dista a_0 dalla stella madre. Da campagne osservative precedenti, sappiamo che l'orbita del pianeta è poco eccentrica ($e \ll 1$). Ricordarsi che per rispondere a un punto si possono usare i risultati dei punti precedenti (anche se non sono stati risolti).

1. Misuriamo il giorno siderale[1] t_{si} e quello stellare[2] t_{st} con $t_{\mathrm{st}} > t_{\mathrm{si}}$. Considerando la bassa eccentricità dell'orbita, ottenere una stima del tempo T_0 di rivoluzione del pianeta.

2. Dopo $T_0/2$ il giorno stellare misura t'_{st}. Determinare l'eccentricità dell'orbita e e la lunghezza del semiasse maggiore a.

3. Determinare la massa M della stella.

4. Nota una banda di assorbimento del sodio a λ_0, questa viene osservata dal pianeta e si rileva uno spostamento verso il rosso di $\Delta\lambda$. Determinare il raggio R_s della stella , supponendo che $a \gg R_s$. Trascurare gli effetti dovuti all'eccentricità dell'orbita.

5. La lunghezza d'onda per cui si ha il picco dell'emissione della stella è λ_{MAX}. Approssimando la stella come un corpo nero, determinarne la temperatura T.

6. Nell'approssimazione di orbita circolare e di pianeta perfettamente conduttore, trovare la temperatura di equilibrio del pianeta.

[1]Si definisce giorno siderale il tempo necessario perché il pianeta compia un'intera rotazione. In altre parole è il tempo impiegato dalle stelle fisse a tornare nella stessa posizione per un osservatore sulla superficie del pianeta.

[2]Si definisce giorno stellare il tempo necessario perché il pianeta torni a puntare la stella attorno a cui ruota. In altre parole è il tempo che trascorre tra due successive culminazioni della stella.

7. Considerando l'orbita ellittica, nell'approssimazione in cui il pianeta abbia una grande capacità termica, tale che la sua temperatura si mantenga pressocché costante lungo l'orbita, calcolare la temperatura di equilibrio del pianeta. Esprimere il risultato in funzione di T, R_s e dei due semiassi dell'orbita.

11 Gas e setto mobile ★★ [100pt]

In questo problema si vuole studiare qualitativamente il moto di un setto mobile in un tubo in diverse condizioni.

Si consideri un tubo verticale, chiuso ad entrambe le estremità, di lunghezza $2l$ e sezione S suddiviso in due porzioni da un setto mobile di massa m e spessore trascurabile. Inizialmente il setto si trova esattamente a metà dell'altezza del tubo e da entrambe le parti vi è la stessa quantità di gas alla stessa pressione P_0. Si supponga per ora che le pareti del tubo così come il setto mobile siano completamente isolanti e che nonostante non ci sia equilibrio le trasformazioni siano sempre adiabatiche reversibili. Si chiami γ l'indice adiabatico delle trasformazioni prese in esame. Tutto il sistema si trova in un campo di gravità verticale di modulo g. Trascurare l'attrito meccanico tra setto e tubo.

1. Dalle informazioni date nel testo determinare qualitativamente cosa succede al setto appena il sistema viene lasciato libero di muoversi.

2. Trovare un'espressione che leghi l'accelerazione istantanea del setto al suo spostamento dalla posizione iniziale, nel caso in cui questa sia molto minore della lunghezza del tubo. Possono essere utili le seguenti approssimazioni, valide per $x \ll 1$: $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ e $(1-x)^\alpha \approx 1-\alpha x$.

3. Trovare la legge oraria del moto per piccoli spostamenti dalla posizione iniziale.

Si supponga ora che le pareti **laterali** del tubo non siano perfettamente isolanti, ma che ogni istante vi sia un flusso di potenza direttamente proporzionale alla differenza di temperatura tra esterno e interno. Supporre che questo scambio termico avvenga molto lentamente, in modo che le trasformazioni del gas possano ancora essere considerate adiabatiche nei tempi caratteristici del moto.

4. Dette W e W' le potenze istantanee scambiate tra l'esterno e rispettivamente il gas che si trova sotto e sopra il setto poco dopo che il sistema viene lasciato libero di evolvere, si trovi la dipendenza tra le due potenze e la posizione del setto. Si supponga che inizialmente la temperatura T_0 delle due porzioni del gas e dell'esterno siano uguali e che gli spostamenti del setto siano sempre molto più piccoli della lunghezza del tubo. Si definisca una chiara notazione per i segni delle potenze.

Si supponga che dopo un ciclo il setto si trovi di nuovo nella posizione iniziale. Si chiamino T e T' le temperature dei gas rispettivamente nella parte inferiore e superiore in questa condizione.

5. Si dica che relazione c'è tra T, T' e T_0. Si ricalcoli il punto 3 imponendo T e T' come temperature iniziali delle due porzioni di gas. Si trovi l'espressione per la nuova posizione di equilibrio G in funzione delle due temperature, delle n moli di gas che sono presenti in ognuna delle due parti del tubo, della costante dei gas e degli altri parametri del problema. Come sono variati i parametri caratteristici del moto rispetto a quando li hai calcolati nel punto 3?

12 Una lente tagliata a metà ★★ [100pt]

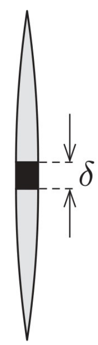

Figura 5: lente tagliata a metà.

Una lente convergente di lunghezza focale f è tagliata lungo un piano che contiene l'asse ottico della lente e una piccola piastra nera di spessore δ viene posta tra le due metà di lente (Figura 5). Una sorgente di luce monocromatica e puntiforme con lunghezza d'onda λ si trova sull'asse ottico (o meglio, su quello che era l'asse ottico prima che la lente fosse tagliata a metà), a una distanza p dalle lenti ($p > f$).

1. Quante sorgenti immagine si formano e dove sono posizionate? Calcola la loro distanza reciproca Δ e la loro distanza dalla lente q.

Uno schermo perpendicolare all'asse ottico viene posto a una distanza H dietro le lenti. Vogliamo calcolare il numero di frange d'interferenza che si formano sullo schermo.

2. Quanto vale la larghezza l dell'area sullo schermo dove possono formarsi frange di interferenza?

3. Quante frange si formano?

Dati: $f = 10\,\text{cm}$, $p = 20\,\text{cm}$, $\delta = 1\,\text{mm}$, $\lambda = 0.5\,\mu\text{m}$, $H = 50\,\text{cm}$.